Lärande i matematik

Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper

Yvonne Liljekvist

Fakulteten för humaniora och samhällsvetenskap

Pedagogiskt arbete

DOKTORSAVHANDLING | Karlstad University Studies | 2014:16

Lärande i matematik

Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper

Yvonne Liljekvist

DOKTORSAVHANDLING | Karlstad University Studies | 2014:16

Lärande i matematik - Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper

Yvonne Liljekvist

DOKTORSAVHANDLING

Karlstad University Studies | 2014:16

urn:nbn:se:kau:diva-31456

ISSN 1403-8099

ISBN 978-91-7063-546-5

Distribution:
Karlstads universitet
Fakulteten för humaniora och samhällsvetenskap
Institutionen för pedagogiska studier
651 88 Karlstad
054 700 10 00

Tryck: Universitetstryckeriet, Karlstad 2014

WWW.KAU.SE

Pappa
visade mig stjärnorna

Till min läsare,

Matematikuppgifter är det övergripande temat i den här avhandlingen. Utgångspunkten i en avhandling i pedagogiskt arbete är praktiknära och därmed central för matematikundervisning. Men metoder och teorier för att undersöka mer i detalj vad som händer när elever löser matematikuppgifter har emellanåt fört mig långt in i en laborativ och ”pre-klinisk” nivå av forskning. Det har varit en spännande och lärorik tid.

Avhandlingstexten är upplagd i två delar. Den första delen, som är skriven på svenska, inleds med en beskrivning av bakgrunden. Där finner du som läsare en redogörelse för det didaktiska problem som jag riktat blicken mot och den vetenskapliga bakgrund som studien bygger på. Där kan du även se vilka avgränsningar som gjorts. Därefter beskrivs de teorier som sätts i arbete i studien som helhet och i var och en av delstudierna. Sedan följer en genomgång av vilken betydelse designforksning haft för avhandlingen. Resultaten presenteras dels genom en beskrivning av var och en av artiklarna, dels som en sammanfattande slutsats. Det handlar om hur resultaten kan komma att påverka lärare, lärarutbildare och forskare i deras fortsatta arbete med att utveckla matematikundervisning och forskning. I den andra delen av avhandlingen finner du de forskningsartiklar, d.v.s. de olika delstudierna, som utgör empiriska grunden för avhandlingen. Artiklarna är skrivna på engelska, eftersom målet är att nå större delar av forskarsamhället.

Att skriva en avhandling är ett ensamarbete, med det är många som ”te har hjälpt och på har skjôte te dätta” och utan alla dem hade det inte varit möjligt att genomföra det här projektet.

Först ett varmt tack till mina handledare Héctor och Johan, som oförtrutet har stöttat mig genom min doktorandtid. Ola, Maria och Magnus, tack för att ni djupläst och diskuterat texten på ett framåtsyftande sätt när den presenterats vid seminarier. Mina kolleger vid Matematikavdelningen, Institutionen för pedagogiska studier och i forskargruppen SMEER vid Karlstads universitet har genom att vara mina kritiska vänner gjort min avhandling bättre. Ett stort tack till alla medlemmar i forskargruppen LICR vid Umeå universitet. Utan er hade jag inte lärt mig hälften så mycket om forskningens premisser, utmaningar och problemlösningar.

Tack till Anna, Ann och Elisabeth för att ni lagt ned mycket arbete och hjälpt mig med mitt skrivande, med referenshantering respektive översättning.

Tack till alla lärare och forskarstudenter i doktorgradskurserna vid Universitetet i Agder och på NoGSME-sommarskolorna i Danmark, Norge och Estland för inspirerade samvaro. Tack till Partypinglorna och Födelsedagsklubben för att ni gjort min doktorandtid gladare och festligare. Till Zaz, Stacey Kent och Hindi Zahra som har varit mitt sällskap och hjälpt mig hålla humöret uppe genom många och långa skrivardagar, kvällar och nätter: tack för musiken!

Ett särskilt tack till Mathias, som bistått med goda råd och glada skratt i både med- och motgång, och till Jorryt för att hon både bokstavligt och bildligt delat resan med mig.

Min kära familj: Tack till min syster Annika och min svägerska Annica med familjer för allt stöd och för att ni dragit iväg med mig på olika saker så att jag blev tvungen att vara ledig. Och slutligen, hur hade jag klarat detta utan er Peter, Erik och mamma Birgitta? Tack.

> Awareness is a universe, not one thing reached all at once and forever. Because of this, education is a never-ending task an ever-renewed challenge taking us form one peak to a new departure to climb again to a new peak and so on.
>
> Caleb Gettengo

Mot nya mål,
Karlstad mars 2014

Artikelöversikt

Artikel 1
Reasoning in alignment with task properties? Students' actual handling of imitative and creative mathematical reasoning
(Liljekvist, Lithner, Norqvist, & Jonsson, artikelmanus)

Artikel 2
Learning mathematics through imitative and creative reasoning
(Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner, under granskning)

Artikel 3
Learning mathematics without a given solution method have beneficial effects on subsequent performance and modulates brain activity
(Karlsson, Lithner, Jonsson, Liljekvist, Norqvist, & Nyberg, artikelmanus)

Artikel 4
Teacher-shared documents on the Internet: Didactical message and mathematical tasks
(Liljekvist, under granskning)

Innehållsförteckning

Del 1

1 Inledning

Amos, som var en av eleverna i min nya sjua, dröjde sig kvar efter mattelektionen:
”Jo, Yvonne... Det är en sak jag vill att du ska veta.”
”Ja?”
”Jag... kan inte multiplikationstabellen.”
”Nehej, hur då menar du? Kan du inget av den, inte tvåans tabell eller...?”
”Ja, jo, jag kan ju tvåans tabell och treans... och femmans, ettans och tians... och nästan fyrans och sexans.”
”Då kan du ju en hel del.”
”Men jag kan ju inte ... de där... du vet... sju gånger åtta och sånt. Jag *kan* ju inte tabellen ju... *kan inte lära mig den!*”

Amelia gick också i sjunde klass när jag träffade henne första gången. Hon hade ”svårt med matten”, berättades det för mig. Hon fick stöd av speciallärare, men den mesta av lektionstiden i matematik var hon hos mig i klassrummet med de övriga 23 eleverna. Jag var alldeles nyutexaminerad lärare och jag försökte på olika sätt stötta henne. Hon hade bland annat svårt med att räkna ut tal i decimalform. Hon hade ingen som helst aning om hur mycket 1,5 + 1,25 skulle kunna vara. Det märkliga, som jag inte förstod orsaken till förrän långt senare, var att om enheten var kronor, så kunde hon direkt ge svaret 2,75. Men om det inte var någon enhet, eller om det var någon annan enhet: meter, kilogram eller centiliter, etc., så var det omöjligt. ”Tänk i pengar”, sade jag då hon körde fast och hon jobbade, någorlunda lyckosamt, vidare med uppgifterna i matteboken.

1.1 Problemformulering

Genom berättelserna om Amos och Amelia kan matematikundervisningen i skolan ses i blixtbelysning. Den fungerar inte så väl som den skulle kunna göra. Undervisningen leder i stor utsträckning in eleverna i olika lärandestrategier, som går ut på att försöka lära sig en mängd saker utantill, utan att de egentligen förstår vad det handlar om (Boesen et al., 2014). Att lära sig termer och procedurer utantill, ibland utan att förstå, är en del av att lära sig matematik. Problemet uppstår när det blir den dominerande undervisnings- och lärandestrategin, eftersom det inte är möjligt för eleven att utveckla sin matematiska kompetens till att omfatta exempelvis problemlösningsförmåga eller begreppsförståelse genom att lära sig allt utantill. Det är exempelvis välkänt att det inte finns någon överföring från utantillkunskap i form av fakta och procedurer till förmågan att kunna lösa icke rutinartade problemuppgifter (Schoenfeld, 1992).

Det är antagligen oundvikligt att använda metaforer vid beskrivningar av kunnande, lärande och undervisning. Hiebert (2003) spetsar till det och menar att amerikanska elever agerar som robotar med dåligt minne när de tar sig an matematikuppgifter och det finns undersökningar som visar att beskrivningen täcker in även svenska elevers beteende (E. Bergqvist et al., 2010). Att elever i alltför hög grad strävar efter att lära sig utantill och att imitera processer utan att förankra sina resonemang i underliggande matematiska principer och idéer beror på flera saker. Men en grundläggande slutsats som kan dras från ett stort antal studier är att elever helt enkelt lär den matematik de får möjlighet att lära (se t.ex. litteraturöversikten av Hiebert, 2003), d.v.s. procedurella beräkningar och att memorera termer och definitioner. Det medför att eleverna inte i tillräckligt stor omfattning ges möjlighet att utveckla och erövra matematisk kompetens.

Undervisning och lärande är mångdimensionellt och att finna *en* bästa allomfattande undervisningsmetod är därför knappast möjligt. Däremot är det viktigt att urskilja avgörande didaktiska vägval för att utveckla undervisningen (Brousseau, 1997; Niss, 2007). Ett sådant vägval är utformningen av matematikuppgifter.

Eftersom matematikuppgifter är centrala i matematikundervisningen är det viktigt att öka kunskapen om vilka egenskaper i dessa som ger rika möjligheter för eleverna att utveckla matematisk kompetens och därmed adressera problemet med utantillärandet. Det handlar även om att öka kunskapen om uppgifters effektivitet, bland annat eftersom tiden till förfogande är begränsad både för elever och lärare. En viktig aspekt av didaktisk forskning är hur relevanta resultaten är för skolan. Det är inte intressant för lärare om designade uppgifter och utvecklade lektionssekvenser inte går att praktiskt genomföra i klassrummet (Watson, 2009).

Avhandlingen skrivs i anslutning till forskningsprojektet *Learning by imitative and creative mathematical reasoning* (LICR). Intentionen med projektet i sin helhet är att systematiskt och koherent konstruera kunskap som kan utgöra basen för att dokumentera robusta samband mellan uppgifters egenskaper och elevers lärande. Hiebert och Grouws (2007) menar att den sortens studier behövs för att skapa insikter om hur lärande och undervisning hänger samman. Avhandlingens syfte är mer avgränsat.

1.2 Syfte

Det övergripande syftet med avhandlingen är att undersöka hur olika typer av matematikuppgifter påverkar elevers möjligheter till lärande och val av lärandestrategi. Syftet delas upp i två delsyften: 1) att testa hypotesen om att uppgifter som ger elever möjlighet till, och ansvar för, att konstruera sin kunskap ger effektivare möjlighet till lärande, än uppgifter där en lösningsmetod finns presenterad, och 2) att undersöka didaktiska budskap som ligger i lärares sätt att formulera matematikuppgifter.

1.2.1 Frågor som diskuteras i avhandlingen

I avhandlingen presenteras fyra delstudier i var sin artikel. De första tre artiklarna behandlar delsyfte 1 och den fjärde behandlar delsyfte 2.

Den första artikeln utreder hur elevers resonemang och uppgifters egenskaper hänger samman. Det handlar om hur eleverna motiverar sina lösningsstrategier när de arbetar med olika typer av designade uppgifter. Utgångspunkten är uppgifter som ger elever möjlighet till att använda olika sorters matematiska resonemang.

Den andra artikeln diskuterar hur träning via två olika typer av uppgiftssekvenser påverkar elevers lärande och val av lärandestrategi. I studien kopplas utfallet av träning, test och de olika matematiska utmaningar uppgiftssekvenserna innehåller till elevernas kognitiva förmåga.

I avhandlingens tredje artikel undersöks hur hjärnans aktivering ser ut, ur ett kognitivt och neurovetenskapligt perspektiv, i en testsituation när elever tränat via två olika sekvenser av matematikuppgifter.

I den avslutande fjärde artikeln diskuteras vilka utmaningar, i termer av matematiska förmågor och matematiskt innehåll, lärarkonstruerade uppgifter ger elever. Det handlar om att undersöka vilka resurser som lärarkonstruerade uppgifter på internet kan vara för lärarkolleger, forskare och inte minst för elevers lärande.

1.2.2 Anspråk – och avgränsning

När elever engageras i att lösa matematikuppgifter utmanas de på olika sätt beroende på vad uppgiften innehåller. Utmaningar ska här förstås i termer av elevers *möjligheter och ansvar* att använda och utveckla sin matematiska kompetens i form av problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga och begreppsförståelse, som är centrala lärandemål i skolmatematiken (se t.ex. Skolverket, 2011, Lgr11). Det gäller även kognitiva utmaningar, exempelvis i termer av belastning på arbetsminne.

Problemlösningsförmåga handlar om att kunna lösa uppgifter där eleven inte känner till en lösningsmetod i förväg. Det gäller bland annat att kunna identifiera och beskriva olika typer av problem och kunna lösa dem på lämpliga sätt (Niss, 2003). Att kunna resonera är en grundläggande matematisk förmåga (Harel & Confrey, 1994; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Umland & Hersh, 2006). Det handlar om förmågan att följa och bedöma argumentationslinjer; veta vad ett matematiskt bevis är och vad som skiljer det från andra typer av resonemang; avtäcka grundläggande idéer i en argumentationslinje; och formulera formella och informella argument (Niss, 2003). Resonemang är en fundamental aspekt av matematik (NCTM, 2000; Niss, 2011) som alltså omfattar mer än att konstruera ett resonemang. I avhandlingen kommer begreppet ”förstå” att användas för att beskriva (elevers) insikter om ursprung, förklaringar, mening och användning av det (Brousseau, 1997; Lithner, 2008).

I de fyra delstudier som ligger till grund för avhandlingen utformas, implementeras och/eller analyseras matematikuppgifter. I tre av dem undersöks specifikt vad elever lär sig när de på egen hand arbetar med olika typer av matematikuppgifter. I den fjärde studeras lärarkonstruerade planeringsdokument publicerade på internet. Det är dock utanför avhandlingens räckvidd att studera autentiska klassrumssituationer.

1.3 Teorier som sätts i arbete i relation till problem och frågor

Det övergripande teoretiska perspektivet i avhandlingen är Brousseaus socialkonstruktivistiska teori om didaktiska situationer (Brousseau, 1997). Teorin tar avstamp i Piagets konstruktivistiska hypotes om lärande (Herbst & Kilpatrick, 1999; Kieran, 1998), men Brousseau fokuserar teorin i att undervisnings- och lärandesituationer måste ha ett didaktiskt syfte. Han menar att läraren har ett ansvar att skapa en didaktisk situation där uppgifternas utformning utgör en viktig del i om lärande kommer att ske. I uppgifterna behöver läraren lämna över (en del av) ansvaret för lärandet till eleven.

I de fyra delstudierna, som beskrivs i artiklarna, används Lithners resonemangsramverk (Lithner, 2008). Två begrepp som beskriver olika typer av resonemang – imitativa och kreativa – sätts i arbete, dels som ramar för uppgiftskonstruktion, dels som tolkningsram för vilka möjligheter och utmaningar eleven har att förankra sitt resonemang i fundamentala matematiska idéer. Eftersom kraven i de flesta matematikuppgifter i skolan skiljer sig från de precisa och logiska krav som i strikt mening gäller för matematiska resonemang (t.ex. matematiska bevis), ses resonemang, i ramverket och därmed i avhandlingen, som ett vidare begrepp och appliceras bland annat även på matematikuppgifter för yngre elever.

1.4 Avhandlingens disposition

Avhandlingen består av två delar, först en övergripande och sammanfattande del (en kappa) och därefter en andra del där de fyra artiklar som utgör det empiriska underlaget för avhandlingen presenteras.

Kappan består av sju kapitel. I det andra kapitlet beskrivs bakgrunden till avhandlingens syfte och problemformulering. Det handlar om matematikuppgifter, vilken potential de har och om vilka kognitiva krav uppgiftslösning ställer på elever. Det handlar även om vilka samhällsförväntningar som finns på matematikundervisningen och hur den typiskt genomförs.

I det tredje kapitlet utreds de teorier som sätts i arbete i avhandlingen och det fjärde handlar om de metodologiska utgångspunkter som avhandlingen har. Kapitlet beskriver vad som kännetecknar en designforskningsprocess, som syftar till att utveckla och förbättra undervisning. Vidare redogörs för hur studierna i avhandlingen är förankrade i och delar av en sådan designforskningsprocess.

I det femte kapitlet finns en sammanställning av artiklarna och i det sjätte kapitlet sammanfattas artiklarnas resultat i några övergripande slutsatser. Där diskuteras även antaganden och metodologiska val. Kapitlet innehåller även en diskussion om avhandlingens kunskapstillskott och om fortsatt forskning. Avhandlingens första del avslutas med en engelsk sammanfattning. Därefter följer en andra del där artiklarna presenteras och mitt bidrag i varje artikel beskrivs.

1.4.1 Att kommunicera forskning

Avhandlingens första del är skriven på svenska. Det är ett val jag gjort för att effektivare kunna kommunicera forskningsresultaten även till lärare i skolan och till lärarstudenter. Det innebär att jag strävat efter att ge didaktiska och pedagogiska begreppen svensk språkdräkt. I de flesta fall har vedertagna svenska begrepp använts, men i några fall är det mina egna förslag på terminologi.

1.5 Från lärare till forskare

Flera år efter det att jag arbetade tillsammans med Amos, Amelia och deras skolkamrater, inledde jag mina doktorandstudier i pedagogiskt arbete. Jag fick därför möjligheten att på djupet förstå mer om matematiklärande och undervisning. Efter kontakt med professor Johan Lithner vid Umeå universitet kunde jag genomföra mitt avhandlingsarbete inom ramen för projektet *Learning by imitative and creative reasoning* (LICR-projektet). Det som intresserade mig i projektet var dels att det övergripande syftet med projektet var intressant och relevant för mig som lärare, lärarutbildare och forskare, dels att forskare från olika vetenskapliga discipliner skulle arbeta tillsammans.

LICR-projektet är ett designforskningsprojekt. Det betyder att forskarna i gruppen försöker utveckla och undersöka olika undervisningsmetoder. En central del i matematikundervisningen, oavsett undervisningsmetod, är uppgifterna som eleverna arbetar med. Det blir därför viktigt i projektets första fas att ta sig an matematikuppgifterna och studera dels vilka egenskaper i uppgifterna som gör att eleverna engagerar sig i att lära sig utantill, dels vilka egenskaper i uppgifterna som gör att de engagerar sig i att lära sig principer och mönster.

I avhandlingen presenteras och diskuteras resultat från studier där elevers resonemang och uppgiftsdesign varit ett genomgående tema. Artiklarna speglar olika delar av en designforskningsprocess. Slutsatserna i avhandlingen kan förstås i termer av insikter om matematikuppgifter och lärande, som bland annat kan omsättas i läromedel eller i lärares egenkonstruerade uppgifter.

2 Bakgrund

Matematik kan beskrivas som ”en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling” (Kiselman & Roos, 2014). Den är abstrakt i betydelsen att den frigjort sig från konkreta gestaltningar och ursprung och kan därför användas för att utrycka generella samband och mönster. Matematiken är alltså problemlösande och modellerande till sin karaktär och dess abstrakta natur kan vara grund för både upptäckarglädje och utmaningar för både elever och lärare.

När man behärskar matematik och så att säga ”äger” matematisk kompetens (Niss, 2011), är det inte knutet till ett specifikt område inom matematiken, utan ses som flera övergripande förmågor, exempelvis problemlösningsförmåga, kommunikationsförmåga och resonemangsförmåga:

> Possessing mathematical competence means having knowledge of, understanding, doing and using mathematics and having a well-founded opinion about it, in a variety of situations and contexts where mathematics plays or can play a role. (Niss, 2011, s. 17-18)

Det finns flera systematiska beskrivningar av hur vi kan förstå vad matematisk kompetens är (se t.ex. NCTM, 2000; Kilpatrick et al., 2001; Niss & Højgaard Jensen, 2002). Där beskrivs matematisk kompetens som (elevers) förmågor att hantera matematikens språk och verktyg och att ställa frågor och besvara dem inom och med hjälp av matematiken, samt att se nytta och mening med den. Kompetensen blir synlig när (elever) befinner sig i situationer där det finns en uppgift, ett problem, som kräver matematik för att kunna hanteras och lösas (Niss, 2011).

I avhandlingen undersöks hur olika typer av matematikuppgifter påverkar elevers möjlighet till lärande i matematik och deras val av lärandestrategier. I det här kapitlet kommer därför bakgrunden till avhandlingens syfte och problemformulering beskrivas. Inledningsvis diskuteras vad som menas med matematikuppgifter och vilken betydelse de har för matematikundervisning och för matematiklärande. Därefter lyfts frågan om kravet av att utveckla matematikundervisningen. Uppgifternas betydelse för undervisningen och behovet av att utveckla densamma, leder in till avhandlingens fokus på uppgiftsdesign: att undersöka hur olika typer av matematikuppgifter påverkar elevers möjligheter till lärande och val av lärandestrategi.

2.1 Matematikuppgifter

I matematikundervisningen är uppgifterna centrala. De utgör navet från vilket både uppmärksamhet och aktiviteter i ett matematikklassrum utgår (Niss, 2003). De bör därför vara utformade för att eleverna ska få möjlighet att utveckla matematiska idéer och en matematisk förståelse (Stein & Smith, 1998). När vi talar om matematikuppgifter är termen oftast inte entydligt definierad. En matematikuppgift kan benämnas som ett problem eller en rutinuppgift beroende på sammanhanget. I matematikundervisningen används emellanåt ordet ”problem” för matematikuppgifter med text. Uppgiften i sig behöver alltså inte vara utformad för att ge eleverna möjlighet att utveckla sin problemlösningsförmåga för att kallas problem. I forskningsramverk (se t.ex. Schoenfeld, 1985) betyder ”problem” en uppgift där eleven inte vet lösningsmetoden i förväg.

Stein och Smith (1998) definierar matematikuppgifter som aktiviteter i en klassrumskontext som varar över en viss tid och där aktiviteten syftar till att utveckla en viss matematisk idé. Zhu och Fan (2006) beskriver uppgifter (i läromedel) som en situation där eleven förväntas komma med en slutsats, eller ett svar. Niss (2003) kategoriserar uppgifter i frågeformulär, övningar och problem. I avhandlingen kommer ”matematikuppgift” och ”uppgift” att användas synonymt, som en övergripande term för olika typer av uppgifter (rutinuppgifter, problem etc.) avsedda för matematikundervisning. Uppgifter som av uppgiftskonstruktören är avsedda att utveckla elevers problemlösningsförmåga kommer att kallas för ”problem”.

Matematikuppgifterna i svenska klassrum kommer till största delen från läromedel och eleverna arbetar enskilt med dem under en stor del av lektionstiden (E. Bergqvist et al., 2010). Matematikläromedels innehåll och upplägg är väl undersökta (se t.ex. Haggarty & Pepin, 2002; Johansson, 2006; Lithner, 2003; Zhu & Fan, 2006). Läromedlen innehåller till stor del uppgifter där en inledande instruktion och förklaring ges och därefter ett antal uppgifter för att träna i enlighet med exemplet. De uppgifter som är är avsedda att utveckla elevers problemlösningsförmåga kommer ofta sist i varje avsnitt, och alla elever förväntas inte göra dem. Som tillägg till läromedlet använder lärare exempelvis egenkonstruerade uppgifter och lektionsplaneringar som de delar med kolleger, eller utarbetar tillsammans i arbetslag. Samarbetet sker numera även på internet (Hew & Hara, 2007; Olofsson, 2008; Pepin, Gueudet & Trouche, 2013).

2.1.1 Matematikuppgifters potential

Mason och Johnston-Wilder (2006) pekar på skillnaden mellan den potential till lärande olika uppgifter har och de möjligheter som faktiskt ses och används av elever och lärare. Henningsen och Stein (1997) märkte, när de utformade och använde matematikuppgifter i det amerikanska QUASAR-projektet [1], att komplexiteten i uppgifterna minskades då lärarna implementerade dem. Skillnaden mellan intentionen i uppgiften, hur den implementerades av läraren och hur den uppfattades av eleverna, medförde att uppgiftens potential ändrades och elevernas möjligheter att lära begränsades. Det handlade om möjligheten att arbeta mot de underliggande matematiska idéerna. I undervisningssituationen tenderade lärarna att förenkla uppgifterna, exempelvis vid introduktionen eller i hur eleverna stöttades under tiden de arbetade med uppgifterna.

För att eleven ska kunna förvalta de möjligheter till lärande en matematikuppgift ger, så bör läraren agera didaktisk medvetet menar Brousseau (1997; 2005). Schoenfeld (1985) hanterade detta genom att utveckla ett av-gränsat frågebatteri när han studerade hur elevers problemlösningsförmåga utvecklas. Tanken var att endast leda elevernas uppmärksamhet mot själva problemet och de lösningsstrategier de använde, och därmed undvika att förenkla uppgiften. Genom att erbjuda undervisningssituationer där elever kan erfara och reflektera över kopplingar mellan kunskap, information, erfarenhet, strategier etc. menar Burton (1984) att elevers medvetenhet ökar om existensen och användandet av matematiskt tänkande och resonerande. I arbetet för att skapa mening är det matematiska tänkandet mediet, menar hon.

2.1.2 Matematikuppgifter och elevers kognitiva processer

När en elev arbetar med matematikuppgifter är det vanligt att den ska hålla viss information ”i huvet” samtidigt som den ska processa ny information. Det finns därför ett samband mellan arbetsminneskapacitet och prestation när elever arbetar med matematikuppgifter även om orsakerna till det inte är helt utredda (Nyroos & Wiklund-Hörnqvist, 2012; Raghubar, Barnes, & Hecht, 2010). För att kunna genomföra komplicerade uppgifter hanterar eleven relevant information mentalt i arbetsminnet, genom att aktivt upprätthålla, kontrollera och reglera den. Arbetsminnet kan avlastas med algoritmer eller procedurer och olika verktyg, som papper och penna, räknare eller dator. På det

[1] Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning

viset kan elevers uppmärksamhet riktas mot att utveckla begrepp och problemlösningsförmåga (Case & Okamoto, 1996).

Matematikuppgifter som engagerar elever i procedurella lärstrategier verkar aktivera samma kognitiva processer oavsett matematisk nivå. Exempelvis visar Krueger et al. (2008) i sin studie att det är samma delar av hjärnan som aktiveras när elever löser mer abstrakta uppgifter, som integralberäkningar, som när man löser enklare algoritmer. När eleven engageras i uppgifter som kräver andra typer av matematiska resonemang aktiveras även andra delar av hjärnan än de som är involverade i rena räkneoperationer (se t.ex. Prabhakaran, Rypma, & Gabrieli, 2001).

Att ”tampas” med centrala aspekter av matematiken är viktigt för elevers lärande (Burton, 1984; Hiebert & Grouws, 2007; Mason, Burton, & Stacey, 2010). Flera studier har visat att mer utmaning i form av en mer kognitivt ansträngande process när man återskapar, eller sätter samman, ett begrepp, metod, etc. verkar vara effektivt. Det är bättre för minnet att man inledningsvis behöver anstränga sig för att återskapa sin kunskap, än att den går lätt att återskapa (Pyc & Rawson, 2009). De här resultaten är även satta i en undervisningskontext och har där visat sig vara effektiva (Carpenter, Pashler, & Cepeda, 2009; Larsen, Butler, & Roediger, 2009; Wiklund‑Hörnqvist, Jonsson, & Nyberg, 2014). Dock är det viktigt att påpeka att det är en delikat balans mellan att uppgiften utgör en utmaning för eleven och ger möjlighet till lärande – och att den istället blir ett hinder för elevens lärande (se t.ex. Niss, 2007).

Sammantaget leder detta in till behovet av att utveckla matematikundervisningen. Vi vet att undervisning i matematik, liksom i alla skolämnen, är komplext och att det inte finns några enkla, snabba svar på vad som fungerar (Niss, 2007). Det är därför viktigt att undersöka vad som påverkar elevers mölighet till lärande och val av lärandestrategi.

2.2 Behovet av att utveckla matematikundervisning

Matematikundervisningen syftar till att ge eleverna möjlighet att inse hur matematiken kan sättas i arbete i olika situationer (exempelvis skola, arbete, fritid), om hur matematiken utvecklas historiskt och kulturellt, samt om matematikens karaktär (Niss, 2011). Detta syfte återfinns även i de svenska styrdokumentens skrivningar om förmågor, centralt innehåll och kunskapskrav (se t.ex. Lgr 11). Uppdragen handlar dessutom om matematik för alla, i perspektivet matematikkunnande för den demokratiske medborgaren (Keitel, 2006).

2.2.1 *Sökandet efter ”better practice”*

Bakgrunden till nutidens utbildningspolitiska diskussion kan delvis härledas till resultat av internationella mätningar som TIMSS, Pisa, etc. (Biesta, 2009; Keitel, 2006; Tate & Rousseau, 2007). Lärare ges signaler om förväntat utfall av undervisningen genom styrdokument, politiska utspel, debatter och beslut, där mätande av elevers resultat är viktigt.

Uppmärksamheten har även riktats mot nationella skillnader i hur lärare undervisar matematik. En sådan studie är ”The teaching gap”, där Stigler och Hiebert (1999) noterar, efter att ha studerat videoinspelningar från TIMSS, att det finns didaktiska skillnader i hur japanska och amerikanska lärare planerar och genomför lektioner. De menar att de japanska lärarnas undervisning kännetecknades av strukturerad problemlösning, medan amerikanska lärares undervisning i stor utsträckning handlade om att eleverna skulle lära sig termer och öva på procedurer. ”The teaching gap”, bland andra studier med liknande resultat, har påverkat hur lärarfortbildning, skolutvecklingsprojekt och forskning ser ut även i Sverige[2]. Studien medförde även ett intensifierat arbete med att beskriva matematiska förmågor (se Kilpatrick et al., 2001: ”Adding it up” och Niss & Højgaard Jensen, 2002: ”KOM-projektet”). Den här diskussionen har även påverkat hur läroplaner och kursplaner ser ut, exempelvis nuvarande styrdokument för grundskolan, där de matematiska förmågor som beskrivs i kursplanedelen överensstämmer väl med kompetensramverket i ”Adding it up”.

2.3 Behovet av att utveckla matematikuppgifter

Flera longitudinella forskningsprojekt visar på vikten av att systematiskt utforma matematikuppgifter, exempelvis efter teoretiskt förankrade principer, för att nå effektivt lärande (De Lange, 1996; Lappan & Phillips, 2009; Swan, Binns, Gillespie, & Burkhart, 2013; Swan, 2006). I dessa har forsknings- och skolutvecklingsprocessen syftat till att utveckla uppgifter som lärare använder i undervisningen för att utveckla en mer sammanhängande och intellektuellt

[2] Se exempelvis regeringens uppdrag till Skolverket om fortbildningssatsningen ”Matematiklyftet”, U2012/2013GV (http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.172962!/Menu/article/attachment/U2012_2103_Mattelyftet.pdf).

utmanande undervisning. Tanken var att eleverna ska ges möjlighet att utveckla en mer aktiv syn på sitt eget matematiklärande och inte se på matematik som en rad regler och procedurer att komma ihåg (se t.ex. Swan, 2006). Studierna omfattar uppgifter som ofta är komplexa och syftet med dem är att ge eleverna möjlighet att utveckla matematiska förmågor.

Att lära sig utantill, till exempel tabeller, räkneregler och algoritmer, är en viktig del i matematiklärandet för få ett flyt i räknandet och avlasta arbetsminnet (Kilpatrick et al., 2001). Men om det blir för omfattande och det huvudsakliga syftet med lärandet, minskar möjligheterna att utveckla begrepp och förmågor (Brousseau, 1997; Hiebert, 2003; Kilpatrick et al., 2001). Watson och Mason (2006) visar att genomtänkta sekvenser av proceduruppgifter kan ge underlag för elever att skapa begrepp. Liknande tankar finns hos Lagrange (2002) och Drijvers (2002), som menar att räknare och datorstöd kan ge eleverna en känsla för egenskaper och räckvidd hos matematiska objekt när de arbetar med rutinuppgifter. Det utgör sedan basen för begreppsbildningen.

”Realistic Mathematics Education” från Nederländerna (Gravemeijer, 1994) och ”Mathematics in Context materials” från USA (Coxford et al., 1999) är exempel på hur noggrant utformade sekvenser av uppgifter kan uppmärksamma eleverna på generella mönster. I Sverige finns bland annat utvecklingsarbete med variationsteoretisk ansats (Holmqvist, 2006), inte sällan gällande grundskolans lägre årskurser.

För att systematiskt undersöka vilka samband det finns mellan elevers lärande och uppgifters egenskaper används dels Brousseaus teori om didaktiska situationer (Brousseau, 1997) och Lithners resonemangsramverk (Lithner, 2008), dels en designforskningsansats (McKenney & Reeves, 2012). I de följande två kapitlen kommer avhandlingens teoretiska och metodologiska ansats att beskrivas.

3 Teori

I det här kapitlet beskrivs mer utförligt de två teorier som sätts i arbete i avhandlingen. Båda teorierna har ett kognitivt och socialkonstruktivistiskt grundantagande och är empiriskt grundade i en matematikdidaktisk, praktiknära kontext. Kapitlet inleds med Brousseaus (1997) teori om didaktiska situationer där olika delar av en undervisningssituation modelleras. Kapitlet fortsätter sedan med Lithners (2008) forskningsramverk om imitativa och kreativa matematiska resonemang.

3.1 Brousseaus teori om didaktiska situationer

Matematisk kompetens, som det har utvecklas av matematiker i ett visst sociohistorisk sammanhang av möjliga frågeställningar, är personligt och kontextuellt, men matematiken presenteras, exempelvis i skolan, som färdiga regler och lösningar (Brousseau, 1997). Det gör att den tappar sitt sammanhang, blir avpersonifierad och a-kontextuell. För vetenskapsämnet matematik är detta inte ett problem, snarare en konsekvens av matematikens väsen, men vid lärande och undervisning kan det vara det. Det kan till exempel innebära att eleverna i hög utsträckning använder imitativa och procedurella lärande-strategier (Brousseau, 1997; Hiebert, 2003).

Umland och Hersch (2006) menar att övergången från att resonera på ett vardagligt sätt om (matematiska) fenomen till ett inom-matematiskt resonerande är ett viktigt steg för elevers lärande. Brousseau och Gibel (2005) pekar på att detta kan ske genom att läraren skapar en kontext där matematiska idéer och principer ”upptäcks” och prövas. Läraren ger på det viset matematiska begrepp, termer och mönster ett sammanhang. Det ger eleverna möjlighet genom att göra matematiken till sin egen och skapa mening genom att (re)konstruera den: ”to make sense of a given collection of experiences” (von Glasersfeld, 1987, s. 9) och därmed bygga robusta, användbara och matematiskt förankrade begrepp (Harel & Confrey, 1994).

Det betyder att undervisningen behöver vara didaktiskt genomtänkt och erbjuda en lärmiljö som är utmanande och som ger eleverna en möjlighet att fördjupa sig i matematiska idéer, att diskutera och resonera (Potari & Jaworski, 2002). Brousseau (1997) framhåller lärarens ansvar för att undervisningen har ett didaktiskt syfte. Han vänder sig både mot majevtik att, som Sokrates, ställa frågor för att leda fram eleven till målet och mot psykologiska och konstruktivistiska modeller i Piagets anda där ansvaret ligger på eleven att inse vad som ska läras. Han föreslår i stället modellen *didaktiska situationer* för att systematiskt undersöka (och utveckla) lärande och undervisning (Brousseau, 1997; Brousseau & Gibel, 2005).

3.1.1 Didaktiska situationer

Den didaktiska situationen kännetecknas av att läraren riktar sin undervisning mot ett speciellt lärandeobjekt, ”ett stycke kunskap” (une connaissance). Det kan vara cirkelns formler, en räkneregel, egenskaper hos fyrhörningar, etc. Lärandeobjektet ramas in och karakteriseras genom uppgifter – problem – som i princip endast kan lösas med hjälp av detta specifika ”stycke kunskap”. När eleven löser uppgiften *genom att konstruera lärandeobjektet* övergår det till elevens kunnande (la conaissance prend le statut de savoir). Uppgifterna behöver ligga inom räckhåll för eleven att lösa.

Den didaktiska situationen innehåller alltså olika delar, dels att läraren har det didaktiska ansvaret att välja lärandeobjekt och utforma eller välja uppgifter där lärandeobjektet kan konstrueras av eleven, dels att eleven accepterar problemet som sitt eget och arbetar med att lösa det. Detta beskriver Brousseau (1997) som en devolutionsprocess, där eleven delegeras ansvar för lärandet. Detta menar Brousseau skiljer hans teori från konstruktivismens idéer om elevens roll i undervisningssituationen.

3.1.2 Devolution – delegering av ansvar

För att eleven ska acceptera problemet som sitt eget, pekar Brousseau på att en maktförskjutning (une situation dévolution) behöver ske; eleven tar makten över problemet och ser det som sitt eget och läraren lämnar över ansvaret till eleven att lösa det. Det innebär att läraren behöver förklara reglerna för aktiviteten, på samma sätt som i ett spel eller en lek, men även förtydliga vilket problem det är som ska lösas så att eleverna ägnar sig åt att nå det matematiska målet och inte leds att tro att genomförandet i sig är det viktiga. Det är alltså regler i form av ramarna för aktiviteten som beskrivs, inte regler i meningen hur man ska tänka för att lösa problemet.

> La dévolution consiste, non seulement à présenter à l’élève le jeu auquel le maître veux qu’il s’adonne, mais aussi à faire en sorte que l’élève se sente responsable (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité) du résultat qu’il doit chercher. (Brousseau 1988 s.)

> Devolution [att dela makten, att delegera] består inte endast av att läraren presenterar uppgiften som hon vill att eleven ska ägna sig åt, utan det handlar dessutom om att få eleven att känna sig ansvarig för (i betydelsen att kunna lära, inte skyldig att göra) att söka efter lösningen. (Min översättning)

3.1.3 Miljö

När eleven ägnar sig åt uppgiften aktiveras den i tre olika typer av processer, menar Brousseau (1997): agerande, formulerande och validerande. Vid agerandet provar eleven vad som händer när den använder de regler och den förkunskap den har att för lösa problemet. Eleven kommer att skaffa sig information om den miljö i vilken problemet befinner sig i (d.v.s. klasskamrater, plockmateriel, bilder, uppgiftens formulering, etc.) och hur det kan lösas. Det uppstår en dialog med miljön, där aktivitet och respons på aktivitet ger information för att ändra – eller behålla lösningsstrategi. Vid agerandet lyssnar, analyserar och diskuterar alltså eleven för att bearbeta strategier och finna lösningar. För att eleven ska komma vidare behöver läraren utmana eleven att formulera sig. Miljön sätter gränser för och stöttar i formulerandet, exempelvis genom tillgängliga representationer och verktyg.

Målet med att försätta eleven i en didaktisk situation är att den ska kunna dra slutsatser och konstruera kunskaper om lärandeobjektet. Det sker i validerandet, där eleven får möjlighet att prova sina antaganden (gissningar) och om de håller eller ska förkastas som argument. Det gör eleven genom att ha en dialog med argumentet å ena sidan och miljön, erfarenheter och förkunskaper å andra sidan. Slutligen formuleras lärandeobjektet på ett generellt vis. Beroende på elevens ålder kommer formuleringen att innebära olika grad av dekontextualisering och formella krav (Umland & Hersh, 2006).

3.1.4 Adidaktisk situation

Elevens agerande, formulerande och validerande sker i interaktion med miljön. Brousseau menar att i denna del av den didaktiska situationen måste lärarens roll begränsas. Det är eleven som arbetar med att söka lösningen på problemet och läraren får inte föreslå lösningar som är liktydiga med lärandeobjektet. Detta är det paradoxala med devolutionsprocessen: om läraren berättar vad det är hon vill att eleven ska förstå, kan eleven inte längre erövra det (Brousseau, 1997; Brousseau & Gibel, 2005; Herbst & Kilpatrick, 1999).

I modellen för den didaktiska situationen finns det alltså en del, som Brousseau kallar adidaktisk, där läraren träder tillbaka och eleven ges ansvaret för att konstruera sin kunskap och det är eleven som äger processerna. Den bärande idén i den adidaktiska situationen är alltså, att läraren inte talar om för eleven vilket lärandeobjektet är utan att eleven på egen hand konstruerar kunskap om det genom att lösa problemet. Adidaktisk ska inte förstås som icke-didaktisk. Det är ett didaktiskt agerande av läraren.

3.1.5 Didaktiskt kontrakt

I modellen för att beskriva didaktiska situationer ingår det didaktiska kontraktet, som är den diskursiva överenskommelsen om arbetsfördelning mellan elever och lärare när det gäller lärande och undervisning. Det är alltså inte ett kontrakt i verklig mening. Det är implicit och det blir synligt först som effekter av hur elever och lärare förstår lärande och ansvarsfördelningen mellan elev och lärare. Kontraktet ses som en ständigt pågående förhandling mellan elev och lärare och det kommer till uttryck exempelvis i vad som händer då en elev inte förstår, eller då läraren bedömer ett trivialt svar som bevis för att eleven kan.

Brousseau (1997) beskriver tre förhållanden där det didaktiska kontraktet kommer att få den didaktiska situationen kollapsa. Det första handlar om hur uppgifter är utformade och elevernas förväntningar på vad som ska göras. Han inspirerades av studier gjorda av Baruk (1985), där hon undersökte elevers strategier när de arbetade med en sorts ”nonsensuppgifter” (Exempel: en uppräkning av åldern på spelarna i ett fotbollslag, och frågan hur många mål de gjorde i matchen). Elevernas svarade oftast på frågan i uppgiften, exempelvis genom att addera de tal som förekommer i uppgiften, trots att det inte skapar mening, och trots att eleverna vet att det är meningslöst. Liknande resultat framkommer då elever löser uppgifter i matematik respektive samhällskunskap (Exempel: Eleverna ska använda portotabeller för att räkna ut hur mycket det kostar att skicka brev eller paket). Eleverna använder helt olika strategier beroende på vilka förväntningar de har på lösningar i respektive ämneskontext (se t.ex. Säljö, 1992). Elever lär sig hur de ska handskas med matematikens uttryckssätt och verktyg på det vis de har störst möjlighet till visar Hiebert (2003) i sin forskningsöversikt. Brousseau (1997) menar att det är lärarens del av kontraktet att utforma uppgifter i en didaktisk situation, som är relevanta och som ger eleven möjlighet att nå kunskapsmålet.

De övriga två handlingsmönstren, topazeeffekten och jourdaineffekten, som sätter den didaktiska situationen ur spel illustrerar Brousseau genom passager från två teaterstycken[3], som troligen är mer kända i en fransk kontext än i en svensk. I de föreliggande studierna är inte dessa effekter aktuella att utreda i djupet, eftersom datainsamlingen inte skett i situationer där lärare och elever interagerar. Dock kan nämnas att topazeeffekten handlar om att lotsa eleverna förbi eventuella svårigheter och därmed minska – eller helt eliminera – elevernas möjligheter att knyta an till matematiska principer och konstruera kunskap om lärandeobjektet. Jourdaineffekten handlar om att läraren, exempelvis för att föra samtalet eller lektionen vidare, bedömer elevers triviala svar som bevis på att de nått kunskapsmålet. Därmed går eleven miste om möjligheten att kunna skapa mening i sammanhanget och formulera och validera sina argument.

Teorin om didaktiska situationer är en systematisk beskrivning av lärande, matematikundervisning och rollfördelningen mellan elever och lärare. I avhandlingen används konstruktet *adidaktiska situationer* vid uppgiftsdesign och analys. Det handlar om att utforma en situation där ansvaret är delegerat till eleven och den accepterar problemet som sitt eget och tar ansvar sitt lärande och interagerar med miljön (uppgiften). För att undersöka vad elever faktiskt gör när de löser uppgifter och på vilket sätt detta påverkar elevernas kunskapsnivå används Lithners (2008) forskningsramverk om matematiska resonemang. I nästa avsnitt beskrivs ramverket mer i detalj.

3.2 Lithners forskningsramverk om matematiska resonemang

Syftet med ramverket är att karakterisera olika typer av resonemang och förklara orsaker till och konsekvenser av elevers användande av olika resonemangstyper. Resonemang betraktas som en produkt av elevens tänkande. Elevens resonemang yttrar sig i form av en resonemangssekvens, som börjar med uppgiften och slutar med ett svar (Lithner, 2008). Det är den tankekedja av antaganden och slutsatser som eleven utvecklar när den löser en matematikuppgift. Det kan vara ett felaktigt resonemang, så länge som eleven, för egen del, har rimliga skäl som motiverar tankekedjan. Resonemang ses som ett vidare begrepp än matematiska bevis.

[3] *topaseffekten*, från Marcel Pagnols satiriska pjäs "Topaze" och *jourdaineffekten*, från Molieres komedi "Den adelstokige borgaren" (Le bourgeois gentilhomme)

Ramverket är avsett att användas för praktiknära forskning, som syftar till både att systematiskt utveckla kunskap om lärande och till att utveckla undervisning. Det bygger på antaganden från kognitiv psykologi och socialkonstruktivistiska överväganden när det gäller att förklara kausalitet och konsekvenser. Lithner (2008) menar att typen av matematiska resonemang som eleverna aktiveras i när de löser uppgifter verkar vara en nyckelaspekt vid lärande och antagandet är att utantillärande uppstår ur imitativt resonemang och att dess motsats är kreativt resonemang. Kreativiteten ses i betydelsen att eleven skapar, eller återskapar, en lösning som är ny för eleven.

3.2.1 Imitativt resonemang

Empiriska studier har visat att det finns två typer av imitativa resonemang som elever använder: memorerade och algoritmiska (T. Bergqvist, Lithner, & Sumpter, 2008; Boesen, Lithner, & Palm, 2010; Lithner, 2000; Lithner, 2003; Palm, Boesen, & Lithner, 2011). När eleverna använder memorerade resonemang, så är strategivalet att ur minnet återskapa ett komplett svar och att sedan skriva ned det. Strategivalet är verkningsfullt när det gäller att återge faktakunskaper, som tabeller eller enhetsomvandlingar, men är mindre användbart när det gäller att förstå innebörden i exempelvis ett bevis (Lithner, 2008).

Algoritmiska resonemang (AR) bygger på att använda en memorerad eller tillgänglig (t.ex. given av läraren eller läroboken) procedur, utan att skapa en ny lösningsmetod. Lithner (2008) påpekar att begreppet "algoritm" i denna användning omfattar mer än uppställningar för olika räknesätt. Syftet med en algoritm är att den ska ta hand om de delar i elevens arbete med att lösa uppgiften som kan vara kognitivt krävande. Tanken med att använda en algoritm är att lösa (grupper av) uppgifter snabbt och rätt. Om eleven identifierat en lämplig algoritm är det bara slarvfel som gör att svaret kan bli fel. Brousseau (1997) påpekar att konsekvensen av det är att eleven inte behöver skapa mening och förankra sina argument i matematiska principer:

> .. the importance [of an algorithm] resides in the fact that the algorithm can be determined in advance, the execution of the n^{th} instruction doesn't depend on any circumstance not foreseen in the $n\text{-}1^{st}$ instruction; it doesn't depend on the findings of new information, on any new decision, any interpretation, and therefore on any meaning attributed to them. (Brousseau, 1997, s. 129)

3.2.2 Kreativt resonemang

En elev som använder kreativt resonemang (creative mathematically founded reasoning, CMR) när den löser en uppgift skapar en, för eleven, ny resonemangssekvens, eller återskapar en sekvens som den glömt. Eleven använder argument som stödjer de strategiska valen den gör och motiverar varför slutsatser är sanna eller troliga. De argument som används är förankrade i matematiska principer och egenskaper:

> …in [creative mathematically founded reasoning] the epistemic value lies in the plausibility and logical value of the reasoning, in [memorized reasoning] and [algorithmic reasoning] it is determined by the authority of the source of the imitated information. (Lithner, 2008, s. 267)

Lithner påpekar att kreativa resonemang inte behöver utgöra en utmaning för eleven på det sätt som problemlösning gör. Kreativa resonemang kan vara elementära. Trots det, konstaterar han, är kreativa resonemang ovanliga och algoritmiska resonemang dominerar i lärande och undervisning (se t.ex. T. Bergqvist et al., 2008; T. Bergqvist & Lithner, 2012; Lithner, 2003; Palm et al., 2011).

Båda teorierna kommer att användas i avhandlingen för att studera och förklara hur olika typer av matematikuppgifter påverkar elevers möjlighet till lärande och val av lärandestrategi. Brousseaus teori används på ett övergripande plan och Lithners ramverk på ett lokalt plan.

4 Metodologi

I avhandlingens andra kapitel berördes helt kort ett antal olika forskningsprojekt där design av matematikuppgifter och undervisningsmetoder varit i fokus. I det här kapitlet kommer utformning och utvecklande, dvs. design, av utbildning som metodologisk utgångspunkt för forskning att beskrivas mer i detalj. Kapitlet inleds med en översikt över ett urval av designforskningstraditioner och därefter en fördjupning av vad som avses med designforskning i den här avhandlingen. Den senare delen av kapitlet ägnas därför åt att beskriva hur designforskningens principer har styrt hur avhandlingens delstudier har utformats.

Begreppet *designforskning* kommer att användas för att beskriva *utbildnings*designforskning (d.v.s Educational Design Research, se McKenny & Reeves, 2012). Det är alltså inte frågan om designforskning, som exempelvis i betydelsen utveckling av dataprogram eller produktutveckling, utan det handlar om forskning specifikt riktat mot att utforma och förbättra undervisning. Syftet med utbildningsdesignforskning är att förbättra undervisningen och därmed ge elever bättre möjligheter att lära. Utbildningsdesignforskningens utgångspunkter är praktiknära och både beskrivande och föreskrivande (Edelson, 2002; McKenney & Reeves, 2012; Van den Akker, Gravemeijer, McKenney, & Nieveen, 2006).

Burton (2002) pekar på den sammanflätade relationen mellan epistemologi och metodologi. Hon menar att det är av vikt att redogöra för på vilket vis och under vilka förutsättningar en viss metod skapar mening, eftersom det finns många sätt att utföra forskningsstudier. Denzin och Lincoln (2000) beskriver forskningsparadigmen som tolkningsstrukturer, som ramar in och håller samman och vägleder forskaren. Det tillsammans med utvecklingen från lärarens normativa perspektiv till forskarens analytiska (Labaree, 2003) utgör grunden för de explicita eller implicita antaganden som formar forskningsdesignen i den här studien (Steiner, 1987). I det här kapitlet förtydligas därför de metodologiska överväganden som guidat arbetet med den här avhandlingen.

4.1 Utbildningsdesign som metodologisk utgångspunkt

Inledningsvis i det här avsnittet beskrivs kortfattat några olika exempel på designforskningsprojekt. Det som binder dem samman är det praktiknära anslaget, den teoretiska förankringen och viljan att förbättra undervisningen och därmed elevernas möjligheter att lära matematik. Därefter resoneras om konsekvenser för och begränsningar av att välja designforskning som metodologisk utgångspunkt mer ingående. En huvudpoäng med designforskning som understryks av bl.a. Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer och Shauble (2003) samt McKenney och Reeves (2012) är att den producerar både teoretiska och praktisk användbara resultat:

> Design experiments are pragmatic as well as theoretical in orientation in that the study of function – both of the design and of the resulting ecology of learning – is at the heart of the methodology. (Cobb et al., 2003, s. 9)

4.1.1 Några olika traditioner och exempel

Forskningsprojekt för att utveckla och forma matematikundervisningen har förekommit i olika former och med delvis olika fokus. I projekten har lärare varit mer eller mindre involverade i utveckling och implementering. Ett exempel på ett av de mer omfattande är hur Freudenthals idéer om matematik och matematiklärande (Wiskobas – Realistic Mathematics Education) har utvecklats och implementerats på alla nivåer i lärarutbildning, fortbildning, forskning, utveckling läromedel och läroplansutveckling, etc. i Nederländerna (se t.ex. Treffers, 1987; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). I Frankrike och Italien har utvecklingen av matematikundervisningen fokuserat på att utforma mer precist designade lektioner eller prototyper av lektioner som sedan utvecklats tillsammans med lärare (se t.ex. Artigue och Perrin-Glorian, 1991, för den franska designmodellen "Didactical engineering" och Arzarello och Bussi, 1998 samt Boero och Dapueto, 2007, för den italienska "Research for innovation"). Liknande sätt att arbeta kan ses inom ”Learning study” (se t.ex. Holmqvist, Brante och Tullgren, 2012, Runesson, Kullberg, och Maunula, 2011, samt van Bommel, 2012) och i ”Community of inquiry” (se t.ex. Goodchild, Fuglestad och Jaworski, 2013, samt Jaworski, Goodchild, Eriksen och Daland, 2011) där lärare och forskare tillsammans utformar, utprovar och förfinar lektioner.

I USA har flera omfattande projekt genomförts där den bakomliggande tanken har varit att bygga upp en kunskap hos lärare när det gäller barns och ungdomars förståelser av olika matematiska begrepp, som tal i bråkform, proportionalitet etc. och hur eleverna kan utmanas kognitivt för att utveckla matematiska begrepp (se t.ex. Cobb et al., 2003 om ”Design Research”, och Henningsen och Stein, 1997, om ”Cognitively challenging tasks”).

De projekt och forskningsprogram som berörts ovan har några gemensamma drag: syftet är att förbättra undervisning och lärande; de är teoretiskt grundade och består av ett antal iterationer av interventioner. Edelson (2002) menar att det skett en utveckling av vad designforskning är – från att ha varit ett sätt att testa teorier om lärande och undervisning, till att använda iterativa och formativa ansatser i en praktiknära kontext. I kommande stycken beskrivs först hur dessa ansatser karakteriserar designforskningen generellt och därefter specifikt hur de används i den här avhandlingen.

4.1.2 Designforskning

Designforskning handlar om att genom cykler av interventioner, förstå mer om kopplingen mellan undervisning och lärande, och därmed förbättra nästa intervention. Syftet är att skapa användbara och hållbara resultat för skol-vardagen. I den iterativa processen studeras hur interventioner fungerar i en viss miljö och ett dialektiskt förhållande råder mellan intervention/utfall och de teoretiska principer som styr, exempelvis, utformningen av matematikuppgifter (se t.ex. Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004). Det är ett resurskrävande sätt att bedriva forskning, och det tar tid (McKenney & Reeves, 2012).

Schoenfeld (2007) avråder forskare från att forcera fram forskningsprocessen. Han menar att det är olyckligt om hoppet mellan pedagogiska och didaktiska idéer om vad som ”borde funka” till storskaliga experiment är för kort, i termer av metodutveckling och kvalitet på interventioner. Schoenfeld jämför med medicinsk forskning där forskningsprocessen präglas av tre faser. Han föreslår därför att motsvarande faser kan utgöra utgångspunkten för den övergripande designen av evidensbaserad utbildningsvetenskaplig forskning: 1) design-experiment, 2) praktiknära studier där implementation och resultat kan studeras under typiska förhållanden, och 3) validering genom storskaliga studier.

Gränsen mellan design och forskning suddas ut i designforskning (Edelson, 2002) och designprocessen, interventionen och teorin verkar tillsammans. Utvecklandet och utformandet av interventionen ger forskare (och lärare) möjligheter att lära sig saker om undervisning, lärande och forskning som inte är möjliga att göra på annat sätt: ”design provides an opportunity to learn unique lessons” (Edelson, 2002. s. 107). Det är två olika typer av lärdomar som kan dras, menar han, beskrivande och föreskrivande. Edelson pekar alltså på den normativa ansatsen som oundvikligen kommer att vara närvarande när syftet är att förbättra undervisning. Utgångspunkten är att det finns en undervisningssituation som har en förbättringspotential och det kommer under designforskningsprocessen att uppstå förslag på hur denna potential ska utnyttjas (Cobb et al., 2003; McKenney & Reeves, 2012).

För att uppnå detta behöver de principer som styr utformningen av interventionen vara teoretiskt väl underbyggda (se t.ex. Fahlgren & Brunström, 2014; Granström & Olsson, 2013). En designforskningsprocess som inte är underbyggd av ett teoretiskt ramverk riskerar att endast bidra med slumpmässiga kunskapstillskott (Kelly, 2006). Antaganden som ligger till grund för val av metoder och valida data behöver klargöras och att räckvidden av resultaten problematiseras. Exempelvis lyfter Kelly fram frågan om hur resultaten kan generaliseras över olika individer eller populationer.

Som vi sett exempel på i kapitlets inledande avsnitt, är designforskning i sig mångfacetterad och studieobjektet komplext. Det finns dock några övergripande idéer som utmärker och styr en designforskningsprocess. Enligt McKenney och Reeves (2012) kännetecknas designforskning av att forskningsprocessen är teoretiskt orienterad, den inbegriper praktiknära interventioner och den handlar om att olika professioner och experter samarbetar. Processen är iterativ och interventioner utformas efter de lärdomar som dragits vid tidigare interventioner, av förstudier och annan forskning. Närheten till skolans praktik är en viktig del i designforskning, men McKenny och Reeves (2012) pekar på att det ska förstås i ett vidare perspektiv:

> …references to 'practice' are done so in a broad sense. Here, practice refers not only to the work conducted in classrooms and schools, but also to the work that *directly affects* classrooms and schools. (McKenny och Reeves, 2012, s. 17, författarnas kursivering)

I nästa avsnitt beskrivs forskningsprocessen i avhandlingen och designprocessen i LICR-projektet med utgångspunkt i dessa kvaliteter.

4.1.3 Avhandlingsarbetets premisser

Målet för forskningsprocessen i avhandlingen är att förstå mer om elevers lärande i matematik och att förstå mer om problemet med utantillärande, som är en av anledningarna till elevers svårigheter med att utveckla sin matematiska kompetens. Bakgrunden till den teoretiskt orienterade designprocessen i LICR-projektet är flera empiriska studier i matematikdidaktik (t.ex. T. Bergqvist et al., 2008; Boesen et al., 2010; Lithner, 2000; 2003; Palm et al., 2011) i kognitiv psykologi (t.ex. Baddeley & Hitch, 1974; Pyc & Rawson, 2009; Raghubar et al., 2010) och i kognitiv neurovetenskap (t.ex. Cabeza & Nyberg, 2000; Prabhakaran et al., 2001; Zamarian, Ischebeck, & Delazer, 2009). Dessutom har arbetet i projektet influerats av studier om problemlösning (t.ex. Schoenfeld, 1985) och kompetens-ramverk (NCTM, 2000; Niss & Højgaard Jensen, 2002). Den övergripande teoretiska ansatsen är kognitiv och socialkonstruktivistisk och drivkraften är empiriskt grundad. Det innebär att de designprinciper som guidar designprocessen ser elevens egen konstruktion av kunskap som central idé om lärande. Undervisning ses som situationer med en didaktisk intention (Brousseau, 1997). Det innebär att eleven utmanas intellektuellt och ges möjlighet att konstruera den kunskap om lärandeobjektet som är målet för undervisningen.

Rent konkret gestaltas designprinciperna i olika typer av uppgifter och uppgiftssekvenser. Inledningsvis genomfördes en inventering där möjliga uppgifter att utveckla söktes. Det handlade både om att utforma uppgifter från grunden, samt att leta efter uppgifter i läromedel och i olika typer av uppgifts-banker på internet. Uppgifterna har provats i pilotundersökningar och därefter sparats eller förkastats. Genom iterationer av interventioner har uppgifternas egenskaper förfinats så att de med stor sannolikhet leder eleverna till att använda specifika typer av resonemang när de löser uppgifterna. Effekterna av elevernas beteende kan sedan studeras exempelvis i form av måluppfyllelse.

Samverkan

Ett annat kännetecken för designforskning är samarbetet mellan olika aktörer inom skola och akademi. I den kontext där avhandlingsarbetet ägt rum har forskande lärare och lärarutbildare, samt forskare från olika universitet och högskolor inom och utom landet, samverkat. Forskarnas expertområden är inom matematikdidaktik, pedagogiskt arbete, kognitiv psykologi och kognitiv neurovetenskap.

Genom samarbetet kan forskargruppens samlade kunskaper användas i designprocessen, för att utveckla matematikuppgifter och metoder. Kunskaper och metoder från kognitiv neurovetenskap gör det exempelvis möjligt att studera de delar av kognitiva processer som inte kan studeras i form av elevernas beteenden. Det handlar om hur, när och vilka delar av hjärnan som aktiveras när eleverna arbetar med olika typer av uppgifter. Teorier och metoder från kognitiv psykologi informerar uppgiftsdesignen exempelvis i form av reglering av belastningen på elevernas arbetsminne. Ett konkret exempel är på vilket sätt och vid vilka tillfällen räknare ska vara tillgängliga för eleverna när de arbetar med uppgifterna. Slutligen, det matematikdidaktiska perspektivet är helt avgörande för att göra uppgifterna relevanta och intressanta för undervisning och lärande.

Reflekterande iterativ process
Arbetsgången har bestått av en rad interventioner, där lärdomar från tidigare interventioner inarbetas som designförslag i nästkommande del. Projektet består av flera faser, där den pågående första fasen kännetecknas av det som Schoenfled (2007) nämner som ”pre-kliniska” studier. Här har designen handlat om att utforma matematikuppgifter, som ger eleverna möjligheter att använda olika sorters resonemang. Detta ligger i linje med den teoretiska orienteringen av projektet, att utforma uppgifterna utifrån designprinciperna sprungna ur Lithners (2008) resonemangsramverk och Brousseaus (1997) teori om didaktiska situationer.

Den allra första intervention i form av pilotstudier inom projektet bestod i att ett mindre antal deltagare arbetade på egen hand med designade uppgifter. Deltagarnas arbete dokumenterades med videokamera och genomfördes som tala-högt-protokoll. Uppgifterna utvecklades från designprinciperna, och informerades av tidigare forskning. Utfallet av den första interventionen orienterade forskargruppen om hur den fortsatta designen av uppgifterna borde gå till för att mer renodla de olika typerna av resonemang (d.v.s. imitativa och kreativa resonemang). Därefter har flera interventionscykler genomförts med elever som arbetat på egen hand med sekvenser av matematikuppgifter. Eleverna har arbetat vid en dator och har inte haft tillgång till anteckningsmateriel eller stöttning av lärare eller klasskamrater (se Artikel 1 och 2).

Arbetet hade två delmål: dels att designa än mer renodlade uppgiftstyper med utgångspunkt i de teoretiskt grundade designprinciperna (t.ex. det resonemnang eleven använder påverkar utfallet och att uppgifterna ska inbjuda eleverna till vissa adidaktiska situationer), dels att utveckla uppgifter som kunde lösas via enklast möjliga interaktion mellan eleven och det datorprogram som visade uppgifterna och som även samlade in data (svarstid, typ av svar, etc.). En anledning var att reducera komplexiteten i datainsamling och analys, i syfte att kunna dra mer precisa och välgrundade slutsatser. Ett konkret exempel var att förenkla interaktionen (t.ex. genom att utveckla flervalsuppgifter) för att vid senare interventioner kunna samla in data i en helt laborativ miljö, i samband med att deltagarnas hjärnaktivitet registrerades i en magnetkamera under tiden de löste matematikuppgifter (se Artikel 1 och 3).

Hittills i den första fasen av projektet har flera interventionscykler genomförts i ett huvudspår, se Artikel 1 och 2, samt två mer experimentella sidospår (d.v.s. hjärnstudien, se Artikel 3, och ögonrörelsestudie, pågående). Fokus har varit på uppgiftsdesign och att undersöka hur uppgifternas egenskaper påverkar elevers lärande. LICR-projektets andra fas är nu initierad, men kommer av förklarliga skäl inte att kunna beskrivas utförligt i den här avhandlingen. Helt kort kan dock nämnas att fokus i den andra fasen av projektet är att utveckla designförslag in i klassrumskontexter. De första förberedande studierna i den andra fasen är genomförda (Granberg & Olsson, 2013). I projektets senare delar kommer alltså lärare, skolledare och annan personal i grund- och gymnasieskolor att involveras i allt högre grad.

Användbarhet – praktiknära

Designforskning har som kännetecken att vara praktiknära och syftet är att skapa användbar kunskap exempelvis för elever, lärare, läromedelsförfattare och för läroplansutveckling. Det är då rimligt att diskutera hur praktiknära designprocessen hittills varit. Är det ett designforskningsprojekt? Som nämnts tidigare, efterlyser Schoenfeld (2007) ett mer systematiskt sätt att utforma forskningsstudier. Han pekar där på vikten av det han kallar ”pre-klinisk” forskning och visar på möjligheten att mer i detalj studera och reda ut vissa samband, innan forskningen tas vidare in i skolvardagen. I avhandlingens studier är uppgiftsdesignen och elevernas resonemang centrala. Interventionerna har visserligen varit utanför en vanlig undervisningssituation, men uppgifterna som designats skulle direkt kunna användas exempelvis i läromedel och principerna för designen kan utgöra underlag för undervisning om att utforma och värdera matematikuppgifter på lärarprogram och i lärarfortbildning. Det överensstämmer väl med McKenny och Reeves (2012) utvidgade definition på praktiknära.

4.1.4 Avhandlingens bidrag till designforskningsprojektet

De fyra artiklar som utgör avhandlingens andra del ska läsas som självständiga bidrag till forskning om matematikuppgifter och elevers resonemang, men den speglar också olika skeden och delar av en designforskningsprocess. I detta avsnitt beskrivs på vilket sätt de artiklar som ingår i avhandlingen förhåller sig till designforskningsprocessens olika skeden och vilket bidrag de ger.

Den första artikeln beskriver hur elevers resonemang och uppgifternas egenskaper hänger samman i en av de inledande studierna. Den andra artikeln beskriver utfallet från en av designcyklerna, där uppgifters egenskaper i termer av effektivt lärande studerades.

De följande artiklarna utgör exempel på två olika typer av studier för den fortsatta utvecklingen av designförslag. Den tredje artikeln rapporterar en studie, som är ett exempel på experimentell grundforskning. Det handlar om att förstå mer om vilka effekter på hjärnans aktivitet som kan ses av träning via olika sorters matematikuppgifter. Den fjärde artikeln består av en deskriptiv studie där lärartillverkade planeringsdokument undersöks. Det handlar om att undersöka nya platser där matematikuppgifter presenteras och se vilka resurser som finns tillgängliga i form av kompetens och uppgiftstyper.

Eftersom designforskningsprojektet pågår, finns det inte artiklar med i avhandlingen som speglar nästkommande fas av projektet, dvs. praktiknära studier där implementation och resultat kan studeras under typiska förhållanden (se Schoenfeld, 2007). De delstudierna är under planering.

4.2 Etiska överväganden

Hostetler (2005) ställer frågan om vad god forskning är och lyfter fram etiska aspekter jämte metodologiska. Han menar att bra forskning inte bara handlar om att följa vissa metoder, utan att forskning även bör vara god i ett vidare perspektiv. Särskilt, menar han, gäller detta utbildningsvetenskaplig forskning, som till sin natur ofrånkomligen är normativ och har moraliska implikationer. Designforskning är oundvikligen normativ i sin strävan att förbättra undervisning (Edelson, 2002). Det innebär att krav ställs på forskaren att även att fråga sig vad som är bra för dessa (elever) vid det här tillfället och i den här situationen, och reflektera över vad vi inte vet – eller inte kan veta.

I delstudierna som redovisas i avhandlingen har interventionerna varit i det som Schoenfeld (2007) beskriver som första fasen, dvs. designade studier. Deltagarna har därför haft stora möjligheter att välja om, när och hur länge de vill delta i studierna. Samtliga deltagare har lämnat in ett skriftligt medgivande. De har varit informerade om att de när som helst, och utan att ange något skäl, kan avbryta sitt deltagande. De empiriska studierna som ligger till grund för Artikel 1, 2 och 3 har behandlats i den lokala etiknämnden vid Umeå universitet. Studien som ligger till grund för Artikeln 4 har i kollegium bedömts inte behöva prövas, eftersom den rör matematikuppgifter och inte personer. De resultat som framkommer ur studierna hjälper oss att förstå mer om de möjligheter som matematikuppgifter har för lärande och undervisning.

5 Sammanfattning av artiklarna

5.1 Artikel 1

Reasoning in alignment with task properties? Students actual handling of imitative and creative mathematical reasoning

(Liljekvist, Lithner, Norqvist & Jonsson)

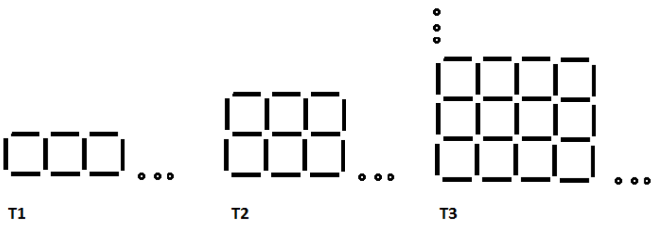
I artikeln redogörs för en studie där elevers strategival och implementering undersöks när de arbetar med olika typer av uppgifter. Frågeställningen som adresseras är hur elever resonerar när de löser de designade uppgifterna och på vilket sätt det ligger i linje med, eller avviker från, uppgifternas egenskaper. Det är dels en fråga om att förstå hur designprinciperna fungerar, dels en fråga om att undersöka mångfalden i elevers resonemang. Uppgifterna utformas utifrån Lithners forskningsramverk (2008) där två olika huvudtyper av matematiska resonemang beskrivs. Den övergripande teoretiska ansatsen är Brousseaus teori om didaktiska situationer (1997).

5.1.1 Urval

I studien deltog 26 elever (16-17 år) som gått ett år på naturvetenskapliga programmet. Deltagandet var frivilligt och ett skriftligt samtycke samlades in. Eleven kunde när som helst under arbetet avbryta sitt deltagande. Eleverna delades in i två grupper efter ett slumpmässigt urval. Grupperna kontrollerades för skillnader i kognitiva resurser (d.v.s arbetsminne och ickeverbal problemlösningsförmåga) och matematikbetyg.

5.1.2 Metod

Uppgifter designades i enlighet med ramverken. Tre sekvenser av tränings-uppgifter där eleverna främst förväntades använda algoritmiska resonemang (AR) och tre sekvenser för kreativa resonemang (CMR) användes i studien. Uppgiftssekvenserna för AR respektive CMR hade samma mål: att eleverna ska lära lösningsmetoder till uppgifter som handlar om olika tändsticksmönster, se Figur 1.



Figur 1. De tre typerna av mönster i uppgifterna i studien

Eleverna arbetade på egen hand vid en dator och svaren på uppgifterna är i form av flervalsfrågor. Eleverna tränade endera med AR-uppgifter eller med CMR-uppgifter. Vid träningstillfällena hade alla elever tillgång till stöttning i form av en särskild sida med ledning för varje uppgiftssekvens. Efter en vecka genomförde eleverna ett test, samma för samtliga elever. Eleverna hade ingen tidsgräns, varken vid träningen eller vid testet, för hur länge de kunde arbeta med uppgifterna. Direkt efter träning respektive test genomfördes en intervju, där eleven och en observatör tillsammans tittade på och samtalade om en skärm- och ljudinspelning av elevens aktiviteter.

5.1.3 Analys

Elevintervjuerna transkriberades och en kodningsmanual utarbetades. Elevens resonemang klassificerades genom att undersöka strategival, implementering och vilket typ av argument som används för att stödja strategivalet, exempelvis om argumenten är förankrade i matematiska egenskaper i uppgiften eller i ytliga egenskaper (t.ex. utseendemässig likhet med andra uppgifter). Därefter sätts elevens resonemang i relation till uppgifternas egenskaper (AR respektive CMR).

5.1.4 Resultat

Resultatet visar att 8 av de 13 eleverna som tränade med AR-uppgifter, som innehåll en föreslagen lösningsmetod, använder den utan att reflektera över de matematiska principer som ligger bakom den. Två elever föredrar att räkna i figuren när uppgiften innehåller låga numeriska värden, medan de resterande tre eleverna reflekterar över uppgiften exempelvis genom att använda figuren i uppgiften för att kontrollera lösningsmetoden innan de använde den. En av dessa elever reflekterar över hur samtliga tre lösningsmetoder hänger samman. Ingen av eleverna i AR-gruppen använde ledningen.

Eleverna som tränade med CMR-uppgifter uppvisar en större variation i vilka argument som används. Mönstret är att eleverna räknar i figuren när det är låga numeriska värden i uppgiften (11 av 13 elever) och konstruerar, eller försöker konstruera, en generell lösningsmetod när det är högre värden (12 av 13 elever). I den här gruppen är det vanligt att eleven söker sig till den ledning som finns tillgänglig (11 av 13 elever). Det handlar om att eleven endera vill verifiera sina tankar, eller behöver stöttning för att de kört fast.

I testsituationen är det fyra av AR-eleverna som använder CMR för att lösa uppgifter på testet, och det är fyra av CMR eleverna som använder AR. I de endimensionella mönstren klarar merparten av elevernas att återskapa en formel (25 av 26 elever på första uppgiftssekvensen, 23 av 26 på andra), medan eleverna generellt sett har svårare att klara av det tvådimensionella mönstret (1 av 13 i AR-gruppen och 12 av 13 i CMR-gruppen). Resultaten visar alltså att det var gynnsammare för eleverna att träna via CMR när uppgiften var mer avancerad.

Resultatet visar också att ledningen till uppgifterna uppfattas på olika sätt. Om eleven har en fixering vid algoritmiska resonemang, ger inte ledningen stöd. Å andra sidan, om eleven konstruerat en lösning som var korrekt men inte fanns med bland lösningsförslagen, hjälper ledningen eleven att lösa uppgiften vid träningen. Men vid testsituationen är det den egna konstruktionen som eleven föredrar att använda för att lösa uppgiften.

Sammantaget visar studien att eleverna i stor utsträckning använder de resonemang som träningsuppgifterna var designade för, men att det är en grannlaga uppgift att utforma en ledning som eleverna faktiskt kan ha nytta av. Att utveckla CMR-ledning, som är flexibel och utan att leda in eleverna i AR är ett uppdrag inför kommande klassrumsstudier.

5.2 Artikel 2

Learning mathematics through imitative and creative reasoning

(Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner)

I artikeln redogörs för en delstudie, där utfallet av olika typer av matematikuppgifter studerades. I studien ingick olika typer av uppgifter, dels en variant där eleverna själva konstruerar en lösningsmetod, dels en variant av uppgifter som ligger nära läromedelsdiskursen, där en lösningsmetod är föreslagen. Även i den här studien utformades uppgifterna utifrån Lithners forskningsramverk (2008) där två olika huvudtyper av matematiska resonemang beskrivs. Lärdomar från tidigare delstudier, bl.a. den som redovisas i Artikel 1, påverkade utformningen. Den övergripande teoretiska ansatsen var Brousseaus teori om didaktiska situationer (1997).

De deltagande eleverna tränade under ca en timme för att lära sig 14 olika lösningsmetoder. I träningssituationen engagerades eleverna endera i imitativa algoritmiska resonemang (AR), eller i kreativa matematiskt grundade resonemang (CMR). Syftet med delstudien var att undersöka och förstå mer om utfallet av de olika undervisningssituationerna. Fyra hypoteser testades: 1) AR kommer att ge bättre utfall på träningen än CMR, eftersom AR har algoritmiskt stöd, 2) AR kommer att ge bättre utfall än CMR, eftersom de ser en lösningsmetod upprepade gånger, vilket borde minska den kognitiva belastningen och därmed underlätta återskapande av lösningsmetoden vid ett senare tillfälle, 3) CMR kommer att ge bättre utfall än AR, eftersom de har ett starkare minnesspår beroende på mer utmaning under träningen och 4) Kognitiv förmåga kommer att vara en viktig prediktor för utfallet. Deltagare med en högre kognitiv förmåga kommer att prestera bättre oberoende av på vilket sätt de tränat.

5.2.1 Urval

Studien omfattar 91 elever på naturvetenskapliga programmet vid fyra olika skolor. Eleverna delades in i två matchade grupper (AR, resp. CMR) baserat på elevernas kognitiva resurser, som mättes med Ravens matriser (d.v.s icke verbal problemlösningsförmåga) och arbetsminnestester (s.k. ”Operation span”) samt elevernas senaste matematikbetyg och slutbetyg från grundskolan. Det var jämn könsfördelning mellan grupperna.

5.2.2 Metod

Uppgifter designades i enlighet med ramverken, d.v.s. en sekvens av träningsuppgifter där eleverna främst förväntades använda AR och en sekvens för CMR. Målet var att eleverna skulle lära sig 14 matematiska samband så att de dels skulle kunna uttrycka dessa i algebraisk form, dels kunna använda dem numeriskt. Informationen i form av text och illustrationer (t.ex. bild på mönster) var lika i de båda uppgiftstyperna, med undantag av att AR-uppgifterna innehöll den algebraiska representationen av sambandet, d.v.s. en formel och ett uträknat exempel.

Interventionen bestod i att eleverna enskilt fick möjlighet att arbeta med uppgifterna under en timme. Uppgifterna presenterades i datormiljö och eleverna hade tillgång till räknare (på skärmen) för att avlasta arbetsminnet. Elevernas arbete med uppgifterna registrerades med samma programvara som presenterade uppgifterna. För att få så lika träningstid som möjligt hade AR-gruppen fem träningsuppgifter till varje samband och CMR-gruppen tre uppgifter. I CMR-uppgifterna var det en stegrande abstraktionsnivå från enkla numeriska till generella mönster. En vecka efter interventionen genomförde samtliga elever ett test. Testet var utformat med tre typer av frågor till varje lösningsmetod. Först efterfrågades formeln (till ett visst mönster) och därefter en numerisk uppgift (på samma mönster). Svarstiden var begränsad till 30 sekunder på dessa typer av frågor. Anledningen var att eleverna vid dessa tillfällen inte skulle engagera sig i att konstruera, eller rekonstruera, lösnings-metoden. I den tredje frågenivån fick eleven möjlighet att under fem minuter lösa den numeriska uppgiften. Samtliga 14 samband fanns med i testet.

5.2.3 Analys

All statistisk analys genomfördes med SPSS 20. T-tester utfördes på träningsresultat och testresultat. För att undersöka inom- och mellangrupps-variationen på testuppgifterna genomfördes en ANOVA analys. En kor-relationsanalys genomfördes för att undersöka samband mellan de olika variablerna (kognitivt index, kön, träningsresultat, etc.). En regressionsanalys genomfördes för att undersöka vilka variabler som var prediktorer för test-resultatet. För att undersöka hur kognitiv förmåga påverkade tränings- och testresultat delades gruppen in i tre undergrupper (låg, mellan och hög kognitiv förmåga) som analyserades som en mellangruppsvariation med ANOVA.

5.2.4 Resultat

Eleverna i CMR-gruppen fick signifikant bättre resultat än AR-gruppen på alla tre frågenivåerna sett över hela testet, $t(89) = 3.54$, $p = .001$, $d = 0.73$. Kognitivt index var en signifikant prediktor för AR-gruppens resultat, men inte för CMR-gruppens. CMR-gruppens resultat berodde framför allt på hur väl individen lyckades i träningen och var mindre beroende av dennes kognitiva resurser.

Vid analysen av data framkom att mönstret kvarstod även när deltagare med högsta tredjedelen av kognitiva index togs bort. Alltså, skillnaden mellan gruppernas resultat var inte beroende av elever med högre kognitiva resurser.

Slutsatsen av studien är att träning genom CMR-uppgifter är mer effektivt än AR-uppgifter, i synnerhet för de elevgrupper som hade lägre kognitiva resurser.

5.3 Artikel 3

Learning mathematics without a given solution method have beneficial effects on subsequent performance and modulates brain activity

(Karlsson, Lithner, Jonsson, Liljekvist, Norqvist, & Nyberg)

I artikeln beskrivs en experimentell delstudie i där syftet har varit att undersöka inre processer, som ett komplement till de beteendedata som samlats in i andra delstudier där deltagare testas efter att ha tränat i AR- respektive CMR-miljö. Syftet med studien är att undersöka på vilket sätt personer som tränat via olika undervisningsmetoder aktiverar olika delar av hjärnan. Frågan är hur man kan förstå utfallet i förhållande till tidigare studier om hjärnaktivitet och matematiklärande och i relation till tidigare utbildningsvetenskapliga och kognitiva studier om matematiklärande.

5.3.1 Urval

Studien omfattar 40 gymnasieelever och 33 universitetsstudenter i åldrarna 18-22 år som läst matematik till en viss nivå (matematik D på gymnasiet) och i övrigt stämmer med de neurovetenskapliga kraven för deltagande i fMRI-studier (neurologiskt frisk, högerhänt etc.). Liksom i delstudierna 1 och 2 delades deltagarna in i två grupper (AR resp. CMR). Grupperna matchades dels med avseende på kognitiva resurser uppmätt med Ravens matriser, dels med avseende på matematikbetyg och kön.

5.3.2 Metod

Uppgifter designades i enlighet med forskningsramverket för matematiska resonemang (Lithner, 2008), d.v.s. en sekvens av träningsuppgifter där deltagarna främst förväntades använda AR och en för CMR. Målet var att deltagarna skulle lära sig nio matematiska formler så att de skulle kunna känna igen dessa i algebraisk form och kunna använda dem numeriskt. Informationen i form av text och illustrationer var lika i de båda uppgiftstyperna, med ett undantag; att AR-uppgifterna innehöll den algebraiska representationen av formeln.

Interventionen bestod i att deltagarna enskilt fick möjlighet att arbeta med uppgifterna under maximalt en timme. Uppgifterna presenterades i datormiljö. Arbetet med uppgifterna visades med samma program som registrerade insamlade data (exempelvis knapptryckningar, tid, etc.). En vecka efter interventionen genomförde samtliga deltagare ett test. Testet var utformat med flervalsfrågor och genomfördes i magnetkameran, där hjärnaktiviteten registrerades (*Functional Magnetic Resonance Imaging*, fMRI).

Vid testet varvades matematikuppgifter med kognitiva-perceptuella uppgifter, för att kunna subtrahera deltagarnas hjärnaktivitet som uppkommer exempelvis från sinnesintryck och när de läser texter. På det viset kan man försöka renodla hjärnaktivitet som kommer av den matematiska delen i uppgiftslösandet.

5.3.3 Analys

Data från fMRI-körningarna analyserades med SPM8 inbäddat i Matlab 7.11. I studien finns data från exempelvis svarstid på uppgifterna och typ av svar, men även en stor mängd mätningar av hjärnans aktivitet, det vill säga BOLD-responsen (Blood Oxygentaion Level Dependent). Resultaten från varje deltagare förbehandlades innan de bearbetades statistiskt för att till exempel komma till rätta med effekter av rörelse och spatiala avvikelser jämfört med en standardhjärna. Den statistiska bearbetningen skedde sedan först på individnivå och därefter på gruppnivå.

5.3.4 Resultat

Resultatet från experimentet visar att typen av uppgifter som deltagarna engagerades i under träningen påverkar både utfallet på testet och vilken typ av hjärnaktivitet som observerades. De deltagare som tränat med CMR-uppgifter klarade testet bättre än de deltagare som tränat med AR-uppgifter ($t(1,71) = 2.4$; $p = .02$). De deltagare som tränat med AR-uppgifter behövde rekrytera relativt mer av vänstra *gyrus angularis*, en del av bakre hjässloben som i tidigare studier visats vara en viktig komponent vad gäller verbala aspekter av mental aritmetik.

Skillnaderna i prestation samt hjärnaktivitet mellan de olika träningsgrupperna gör att CMR kan behöva uppmärksammas i kommande studier, som en komponent i de modeller som finns över hur hjärnan arbetar vid matematiska resonemang.

5.4 Artikel 4

Teacher-shared documents on the Internet: Didactical message and mathematical tasks

(Liljekvist)

Studien som presenteras är ett exempel på undersökningar som informerar designprojektet inför nästa klassrumsnära fas. I studien analyseras matematik-uppgifter i undervisningsmateriel publicerat på internet. Undervisnings-materielen utgör en kollega till kollega kommunikation och det didaktiska budskap som kommuniceras i dokumenten är i studiens fokus. Syftet var att undersöka vilka kursplanemål som adresseras i uppgifterna och vad som krävs av eleverna för att lösa uppgifterna. Vidare undersöks instruktioner och beskrivningar av uppgifterna med avseende på hur de är tänkta att användas.

Undervisningsmateriel finns i olika former på internet, exempelvis som inspelade föreläsningar, lektionsplaneringar och enstaka uppgifter. Materielen som studerats här är elektroniska dokument i form av mer eller mindre fullständiga lektionsplaneringar. I dessa återfinns instruktioner till lärarkollegor och elever, samt olika typer av matematikuppgifter.

Lärares professionella kommunikation och interaktion i sociala medier är väl studerad (se t.ex. Hew & Hara, 2007; Olofsson, 2010). Föreliggande studie kartlägger andra delar av den internetkommunikation som sker mellan lärare; nämligen en didaktisk kommunikation. Det handlar om det matematiska och matematikdidaktiska innehåll de dokument som publiceras har och den resurs som dokumenten därmed utgör. Det didaktiska budskapet kommuniceras i termer av mål, implementeringsförslag och motiveringar studeras. Med mål menas här innehållsmål och kompetensmål. Implementeringsförslag handlar om hur lärarna föreslår att uppgifterna ska omsättas i undervisningen och motiveringar handlar om hur den publicerande läraren kopplar den föreslagna implementeringen till de mål som anges med uppgiften.

5.4.1 Urval

I studien har 84 elektroniska dokument analyserats. Dokumenten är nedladdade från en webbsida där lärare delar bland annat undervisningsmateriel. Sökkriteriet var dokument avsedda för matematikundervisning i årskurs 4-6 respektive 7-9. Dokumenten omfattar ca 900 matematikuppgifter.

5.4.2 Analys

Analysen av dokumenten skedde i två steg. Inledningsvis genomfördes en innehållsanalys (Krippendorff, 2004; Bryman, 2008). Där kartlades kategoriska och tematiska egenskaper i dokumenten relaterat till innehållsmål i termer av centralt innehåll och till kompetensmål i termer av förmågor (jämför med uppdelningen i Lgr 11). Därefter analyserades innehåll i elevinstruktioner och matematikuppgifter relaterat till vad som krävs av eleven för att lösa uppgiften i termer av matematiska förmågor som problemlösningsförmåga, resonemangs-förmåga, kommunikationsförmåga och begreppsförståelse.

5.4.3 Resultat

I de analyserade dokumenten dominerar uppgifter i talområdet naturliga tal. De utmaningar som förekommer för eleverna i uppgifterna är till stor del i linje med läroplanens skrivningar för de yngre eleverna, trots lärarnas gradering på uppgifterna (4-6 och 7-9). Dock innehåller ett antal av dokumenten som analyserats gömda resurser i form av uppgifter och uppgiftssekvenser som ger eleverna möjligheter att utveckla sina förmågor. Exempelvis innehåller ca 10 % av dokumenten uppgifter som kräver kreativa matematiska resonemang för att lösa uppgifterna. Det innebär att eleverna ges möjligheter att förankra sina tankar och att kommunicera dem med och inuti, för åldersgruppen relevant, matematik. Dessa dokument är intressanta att studera vidare och prova i den fortsatta designprocessen. Lärare som konstruerat dessa typer av uppgifter är en resurs för det fortsatta arbetet.

6 Slutsatser och avslutande diskussion

Det övergripande syftet med avhandlingen är att undersöka hur olika typer av matematikuppgifter påverkar elevers möjligheter till lärande och val av lärandestrategi. Syftet delas upp i två delsyften: 1) att testa hypotesen om att uppgifter som ger elever möjlighet till, och ansvar för, att konstruera sin kunskap ger effektivare möjlighet till lärande, än uppgifter där en lösningsmetod finns presenterad, och 2) att undersöka det didaktiska budskap som ligger i lärares sätt att formulera matematikuppgifter.

Kapitlet inleds därför med att diskutera undersökningens praktiska resultat för undervisning och lärande. Därefter diskuteras teoretiska och metodologiska slutsatser i förhållande till en fortsatt designforskningsprocess. Slutsatser är möjliga att dra dels från resultaten av varje artikel för sig, dels från artiklarna sammantaget i förhållande till designforskningsprocessen och i förhållande till skola och undervisning. I det här kapitlet diskuteras slutsatser av båda slagen.

6.1 Praktiknära slutsatser

I tre av de studier som presenteras i avhandlingen, har deltagarna arbetat i en adidaktisk situation (jfr. Brousseau, 1997, 2005, den del av den didaktiska situationen där eleven arbetar på egen hand med matematikuppgiften utan intervention från lärare eller kamrater) endera med imitativa uppgifter, där en lösningsmetod finns presenterad, eller med kreativa uppgifter där de behöver konstruera lösningsmetoden. Syftet med upplägget var att pröva olika hypoteser om sambandet mellan träning och test av samma lärandeobjekt men med olika typer av uppgifter.

Den övergripande slutsatsen som kan dras är att det har betydelse vilken typ av uppgifter eleverna engageras i när de ska lära sig något nytt. De elever som engagerades i att konstruera sin lösning hade sämre resultat på träningen men bättre resultat på testerna, än de deltagare som engagerats i att lösa uppgifterna med en given lösningsmetod. Resultatet drevs inte av de deltagare som hade högst kognitivt index, utan tvärtom visade det sig att uppgifterna designade inom den kreativa metoden gav deltagare med mer begränsat arbetsminne etc. bättre förutsättningar att lära sig och nå kunskapsmålet.

Det innebär att undervisning som bygger på uppgifter där eleverna har tillgång till lösningsmetoden och därför inte behöver konstruera den, är mindre effektiv.

Detta ligger i linje med Brousseaus (1997) teorier om didaktiska situationer, där han menar att den kunskap eleven ska erövra inte skall presenteras för eleven, utan ska utgöra svaret på det problem som presenteras, d.v.s en process där eleven konstruerar kunskap om lärandeobjektet. Det handlar även om vilken typ av ansvar för lärandeprocessen som eleven ges. Notera att interventionerna som genomförts handlar om att lära sig nya lösningsmetoder. Ett exempel på praktiknära konsekvens är att resultaten tyder på att det är effektivare på lång sikt om eleven får möjlighet att resonera sig fram till exempelvis sambandet som beskrivs med triangelns formel genom kreativa resonemang. Det betyder att eleven konstruerar sin kunskap om sambandet mellan triangelns höjd och bredd *innan* den använder formeln för att lösa andra uppgifter.

Totalt sett verkar det alltså vara effektivare för eleverna om de engageras i att konstruera kunskap om lärandeobjektet (exempelvis en lösningsmetod, en formel, etc.) under tiden de lär sig, än att träna upprepade gånger där metoden är given. Särskilt gäller detta elever som hade lägre kognitivt index, där det visade sig vara än mer ineffektivt att försöka lära genom upprepad träning. Men det är även viktigt att notera att de elever som tränade via uppgifter där lösningsmetoden var presenterad lyckades väl på träningen. Översatt till en undervisningssituation innebär det att elever klarar uppgifterna under lektionen, men egentligen inte lär sig så effektivt som de skulle kunna göra. De imiterar utan att förstå underliggande principer. Det medför att eleverna inte kan återskapa lösningsmetoden, formeln, etc. om de glömt den när de ska använda den vid ett annat tillfälle.

Det är tänkvärt att resultaten från studierna pekar mot att i en lärandesituation som består av upprepad träning av en lösningsmetod är elevernas resultat starkt beroende av deras kognitiva förmåga. Undersökningen indikerar att uppgifter som ger eleverna möjligheter att lösa dem med kreativa resonemang verkar i viss mån kompensatoriskt, i förhållande till elevers kognitiva resurser. Det betyder att deltagare i testsituationen inte behöver anstränga sig så mycket om de tränat via kreativa resonemang.

Trots att de interventioner som genomförts varit kortvariga (exempelvis omkring 30 minuters aktivt arbete med 14 olika uppgiftssekvenser), så uppstår skillnader mellan grupperna. Resultatet pekar mot att om elever i fler uppgifter möter kravet att förstå underliggande principer för att kunna lösa uppgiften, kommer eleverna lära sig effektivare. Samtidigt är det jobbigare för eleverna att engagera sig i kreativa resonemang, det visar exempelvis att de behöver mer tid till varje uppgift (tre uppgifter i CMR motsvarade tidsmässigt fem uppgifter i AR). Ett visst mått av ansträngning verkar vara viktigt vid lärandet (Henningsen & Stein, 1997; Hiebert & Grouws, 2007; Karpicke & Blunt, 2011; Larsen, Butler, & Roediger III, 2008), så gränsen för när och under vilka omständigheter ansträngningen blir ett hinder behöver undersökas vidare.

6.1.1 Lärarens roll

Resultaten pekar på att en nyckelvariabel i uppgifterna är elevens möjlighet att använda kreativa resonemang och att eleven med stor sannolikhet använder sig av den möjligheten om det är det som står till buds för att lösa uppgiften. Jämför med Mason och Johnstons-Wilders (2006) diskussion om uppgifters potential och vad som eleven utnyttjar, eller ges möjlighet att utnyttja.

Det finns en risk att uppgiftens potential inte fullt ut uppskattas eller uppfattas varken av lärare eller elever (Henningsen & Stein, 1997) . Det handlar dels om brister i det didaktiska kontrakt (Brousseau, 1997) som upprättas mellan eleverna och läraren om vad som förväntas av eleverna när de arbetar med matematikuppgifter, dels om lärares kompetens att planera och genomföra lektioner (Potari & Jaworski, 2002; Rowland & Turner, 2007; van Bommel, 2012). Den faktiska relationen mellan elever och lärare och det praktiska genomförandet har inte varit fokus i avhandlingen. Däremot finns resultat från studien av lärarkonstruerade uppgifter som visar vilka typer av uppgifter som upplevs som användbara i undervisningen. Det didaktiska budskap som visas i dokumenten är att lärare ställer låga krav på eleverna i merparten av uppgifterna. Yngre elever utmanas och ges större möjligheter att utveckla sina matematiska förmågor än äldre elever. Resultatet tyder på en osäkerhet inför hur uppgifter kan formuleras och användas för att stötta äldre elevers matematiska utveckling. Det går inte av studiens metod att avläsa varför dokumenten ser ut som de gör (Bryman, 2001; Krippendorff, 2004) men sättet på vilken uppgifterna formuleras tyder på ett bristande didaktisk språk för att tydliggöra den tänkta didaktiska situationen. Vikten av att lärare upprätthåller och utvecklar ett professionellt didaktisk språk, bland annat för att kunna samarbeta med varandra, är uppmärksammat i flera studier (se t.ex. Grevholm, 2010). Det är även en förutsättning för att lärare på ett effektivt sätt ska kunna utveckla sin praktik genom att enkelt kunna dela och använda varandras planeringsdokument (jfr. Pepin et al, 2013). Det är ett problem om lärarkonstruerade uppgifter med potential att ge elever möjlighet att utveckla sitt matematiska resonemang inte kommer till sin rätt på grund av bristande professionellt språk.

6.2 Slutsatser av avhandlingens resultat ur ett designprocessperspektiv

Genom att anlägga ett designforskningsperspektiv är det möjligt att på ett strukturerat sätt mejsla fram övergripande teoretiska och metodologiska kunskapstillskott om matematiklärande. Samarbetet i LICR-projektet mellan forskare från matematikdidaktik, kognitiv psykologi och kognitiv neurovetenskap medger en bredd av metoder, som belyser sambanden mellan lärande och uppgifters egenskaper från olika håll och ger en flerdimensionell bild.

För att validera effekten av olika typer av imitativa och kreativa träningsuppgifter och identifiera och förklara sambandet mellan uppgifternas egenskaper och elevers lärande utformades teoretiska *designprinciper* för att guida utvecklingsarbetet med uppgifterna. Syftet med det var att resultaten av LICR-projektets delstudier sammantaget ska ge ett systematiskt kunskapstillskott där robusta samband mellan undervisning och lärande beskrivs. En slutsats som kan dras är att de designprinciper som styrt designprocessen varit användbara dels för att hålla en tydlig linje i arbetet, exempelvis vid uppgiftsdesignen, dels för att vara uppmärksam på de ”oväntade resultat” som uppstått i interventionscyklerna. Ett exempel på oväntat resultat var att kognitiv förmåga inte drev resultaten i den grupp av deltagare som tränat via kreativa resonemang. Det som var viktigt var istället hur väl deltagaren klarade av att konstruera lösningsmetoden. Det här är ett betydelsefullt resultat för hur lärare och läromedelsförfattare kan hantera utformning, urval och sekvensering av uppgifter, om de är intresserade av att utveckla uppgifter och läromedel för effektivare undervisning.

När en ny intervention planeras tas tidigare resultat i designprocessen till vara genom de *designförslag* som formuleras. Designförslagen har främst handlat om hur man kan leda in elever i att engagera sig i kreativa matematiska resonemang, och undvika att uppgifterna leder in eleverna i algoritmiska resonemang. Det som studeras genom interventionerna och utgör utgångspunkten för de slutledningar som kan komma att dras. Ett exempel på designförslag kan vara att använda räknare för att avlasta arbetsminne, eller att använda upprepade träningstillfällen för att befästa elevernas kunskaper. Designförslagen valideras (eller förkastas) empiriskt och kan därefter formuleras som nya, eller reviderade, designprinciper. Utifrån designprocessens inledande steg har slutsatsen dragits att det inte är tillräckligt att endast arbeta på de nivåer där designprinciper och designförslag är, utan en systematik och koherent beskrivning behövde även utformas på mer detaljerad nivå. Därför påbörjades arbetet med att utförligt beskriva de variabler som påverkade, eller högst sannolikt påverkade, sambandet mellan uppgifters egenskaper och elevers lärande. På det viset kan dessa på ett systematisk vis studeras i kommande interventioner.

Den övergripande slutsatsen av designforskningsprocessen och den multidisciplinära ansatsen är att den har potentialen att stärka den interna validiteten (orsak och verkan) av interventionerna och därmed ge en grund för extern och ekologisk validitet, som kan testas i projektets klassrumsnära nästkommande fas.

6.2.1 Inför nästa fas av projektet – det klassrumsnära.

Iterationerna i LICR-projektet har krävt mycket arbete och tagit tid, vilket är vanligt i designforskning (se t.ex. McKenney och Reeves, 2012, eller Edelson, 2002). Men det är viktigt att inte gå för snabbt fram. Schoenfeld (2007) menar att detta annars kan vara ett problem inom utbildnings-vetenskaplig forskning, då studierna alltför snabbt lyfts från att vara ett designförslag om, exempelvis, hur sambanden ser ut mellan uppgifters egenskaper och elevers lärande till storskaliga validerande studier. Slutsatserna från de inledande studierna i projektet visar att hypotesen om att uppgifter som ger elever möjlighet till, och ansvar för, att konstruera sin kunskap ger effektivare möjlighet till lärande, än uppgifter där en lösningsmetod finns presenterad. I nästa fas av projektet kommer interventionerna dels bestå av mer varierade uppgifter, dels vända sig till flera olika elevgrupper, dvs. praktiknära studier i en ”vanlig” klassrums-kontext.

Den fortsatta designforskningsprocessen kommer att utgöra delvis nya utmaningar, eftersom det kommer att behövas många fler typer av uppgifter och att de kommer att vända sig bland annat till yngre elever. Lärare är en resurs här, både som användare av och utvecklare av matematikuppgifter i sin undervisning. En av slutsatserna som kan dras av studien av det didaktiska budskap, som ligger i lärares sätt att formulera matematikuppgifter, är att det finns ett antal lärare som konstruerat uppgifter som ger även yngre elever möjligheter att använda kreativa resonemang. Ett sätt för att säkerställa att utfallet av designprocessen är intressant även för grundskolan är att försöka involvera dessa lärare i arbetet.

6.3 Slutligen

Problemet som adresseras i avhandlingen är att matematikundervisningen i alltför stor utsträckning leder in eleverna i lärandestrategier, som går ut på att lära sig utantill, utan att de egentligen förstår vad det handlar om. Men hur ska då elever effektivt lära sig lösningsmetoder, formler etc. om de inte ska mängdträna?

För att diskutera den frågan går vi tillbaka där jag började den här avhandlingen, med Amelia och Amos, för att se hur deras strävan att lära sig utantill påverkade deras lärande och hur jag som lärare gjorde.

Amelia hade som strategival och implementering att se alla tal "i pengar". Det betyder att hon hade talbilder och ett additivt system att arbeta utifrån, inte helt olikt de gamla egyptiernas talsystem. Hon hade inte fått syn på principen som bygger upp det talsystem som vi använder: positionssystemet, dvs. att ett tals värde bestäms av i vilken ordning och på vilken plats sifforna är placerade. Ett tal vilket som helst kunde alltså inte hanteras, om det inte fanns mentala sedlar och mynt att hantera. Det medförde att uppgifter med andra enheter blev meningslösa för Amelia, om hon inte "tänkte i pengar". Alltså, mitt råd till Ameila var direkt kontraproduktivt. Brousseau skulle ha kallat det för att jag kollapsade det didaktiska kontraktet och gjorde den didaktiska situationen meningslös. Undervisningen gjorde det inte möjligt för Amelia att se den matematiska principen *positionssystemet*, som hon behövde förstå för att kunna hantera merparten av alla uppgifter i läroboken.

Min poäng är alltså, att det inte alls var meningsfullt för Amelia att mängdträna med ytterligare uppgifter, eftersom hon inte förstått den underliggande principen. Om hon fick rätt eller fel på uppgifterna berodde på om möjligheten gavs i uppgiften att mentalt hantera talbilderna eller inte. Det berodde inte på om hon förstod vad hon gjorde.

Amos som under flera år hade försökt lära sig multiplikationstabellen utantill genom att på olika sätt träna på den som ett hundra olika kombinationer. Eftersom han, liksom många andra elever, inte lyckades med att lära sig alla kombinationer utantill kände han sig misslyckad. I det här fallet hade jag en mer genomtänkt didaktisk strategi. Amos sattes i en didaktisk situation där han fick arbeta med att undersöka mönster bland kombinationerna, så som kommutativitet (ex. $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$) och hitta sätt att använda kända kombinationer för att komma till nästa (ex. 6•7 är dubbelt så mycket som 3•7). Det handlade om att Amos skulle finna lösningsmetoder som var förankrade i matematiska principer, för de kombinationer som han tyckte var svåra.

Åter till frågan om hur elever effektivt kan lära sig lösningsmetoder, formler etc. om de inte mängdtränar. Min slutsats, efter att arbetat med detta under några år genom mina doktorandstudier, är att det är väsentligt att elever får fler tillfällen att använda kreativa matematiska resonemang för att lära sig lösningsmetoder, exempelvis samband och formler, och först därefter mängdträna. Repetition sägs vara kunskapens moder, men om eleven repeterar något som inte är matematiskt förankrat, när den faktiskt ska lära sig matematik, då är det inte väl använd tid.

Det visar sig att det är mer effektivt för elevens lärande på längre sikt att använda kreativa matematiska resonemang än undervisningsmetoder som premierar exempelvis repetitiv träning av en färdig lösningsmetod. Den viktigaste insikten är att elevernas resultat inte berodde på deras kognitiva resurser, utan att alla elever gynnades av att få använda kreativa matematiska resonemang när de arbetade med uppgifterna.

7 English summary

This compilation dissertation comprises a comprehensive and introductory chapter, which is followed by four articles reporting on the sub-studies that constitute the empirical basis for the dissertation. The introductory chapter is written in Swedish.

7.1 Background and problem formulation

Learning terms and procedures by heart, sometimes without any understanding, is part of learning mathematics. The problems arise when this is the predominant strategy for teaching and learning mathematics in school as problem-solving ability and conceptual understanding, for instance, are not developed through rote learning, and students are thus not given the opportunity to extend their mathematical area of competence (see e.g., E. Bergqvist et al., 2010; Hiebert, 2003). It is widely recognised that there is no transmitting link between rote learning in the form of facts and procedures and the ability to solve non-routine mathematical tasks (see e.g., Schoenfeld, 1985).

A basic conclusion to be drawn from a great number of studies is that students learn the mathematics presented to them (see e.g., Hiebert, 2003), namely procedural calculation and memorising terms and definitions. The result is that students are not given the chance to develop and master mathematical skills to the extent required.

Since mathematical tasks are central to the teaching of mathematics (e.g., Niss, 1993), it is crucial to extend our knowledge of the characteristic features of tasks that are conducive to student development of problem-solving and reasoning abilities as well as conceptual understanding. This dissertation is part of a major research project, titled *Learning by imitative and creative mathematical reasoning* (LICR). The aim of the project as a whole is to construct, systematically and coherently, knowledge that can serve as the basis for documenting reliable correlations between the characteristics of tasks and student learning. Hiebert and Grouws (2007) point out that such studies are needed to provide awareness of the interdependence of learning and teaching. The aim of this dissertation is more delimited.

7.2 Aim

The overriding aim of the dissertation is to investigate how different types of mathematical tasks affect student learning and choice of learning strategies. This is done through a twofold approach: 1) to test the hypothesis that tasks affording students the opportunity and responsibility for constructing knowledge are more effective learning tools than tasks for which the solution is presented, and 2) to analyse the educational message embedded in the teacher's formulation of the mathematical tasks.

7.3 Theories employed in relation to problem and questions

The principal theoretical perspective adopted in the dissertation is Brousseau's social constructivist Theory of Didactical Situations (e.g., Brousseau, 1997). The theory is inspired by Piaget's hypotesis of learning (Kieran, 1998; Herbst & Kilpatrick, 1999). Brousseau's tenet is that teaching and learning situations must have an educational [Fr. *didactique*] purpose. He argues that the teacher is responsible for creating a learning situation where the design of the tasks determines whether learning will take place or not. The teacher needs to leave some of the responsibility to the students, a so-called a-didactical situation.

The dissertation substudies are also informed by Lithner's reasoning framework (2008). Two concepts denoting different types of reasoning – imitative and creative – are used, partly as frames of the task designing, partly as the interpretative frame of the reasoning potential and challenges that can be related to fundamental mathematical ideas. Since most mathematical tasks in school do not require the precision and logic of mathematical proof, reasoning in the framework and by extension in this dissertation is seen in an extended sense and also applied to mathematical tasks designed for younger students.

7.4 Educational design research as a methodological approach

Educational design research involves understanding the link between teaching and learning through cycles of interventions with a view to improving the next intervention (Van den Akker et al., 2006). The aim is to produce useful and sustainable results for regular school use.

The basis of the theoretically-oriented design process in the LICR project are several empirical studies in mathematics education (e.g., T. Bergqvist et al., 2008; Boesen et al., 2010; Lithner, 2000; 2003; Palm et al., 2011), in cognitive psychology (Baddeley & Hitch, 1974; Pyc & Rawson, 2009; Raghubar et al.,

2010) and in cognitive neuroscience (e.g., Cabeza & Nyberg, 2000; Prabhakaran et al., 2001; Zamarian, Ischebeck, & Delazer, 2009). In addition, the project is informed by studies on problem-solving (e.g., Schoenfeldt, 1985) and competency framework (e.g., NCTM, 2000; Niss & Højgaard Jensen, 2002). This means that the principles guiding the design process are based on the idea that student constructing knowledge is central to learning. Teaching is seen as situations with an educational purpose (Brousseau, 1997). Students are thus challenged intellectually and afforded the opportunity to construct the knowledge that is the intended outcome of the teaching.

The design principles are manifested in different types of tasks and task sequences. Initially, a mapping of potential tasks to be developed was conducted. It was both a question of designing tasks from scratch and scanning textbooks and Internet databases for material. The tasks were then tested in pilot studies and saved or rejected. Through iteration of the interventions, the characteristics of the tasks were refined to ensure that students in all likelihood would be moved in the direction of using specific types of reasoning when solving the tasks. The effects of student behaviour were then analysed.

7.5 Sub-studies

The first three articles present the empirical material from three sub-studies involving students working on tasks designed in accordance with specific design principles. The tasks are designed to stimulate students to engage in different types of mathematical reasoning.

The first article investigates how student reasoning and task characteristics are connected. It deals with how students motivate their solution strategies when they work with various types of designed tasks.

The second article discusses how practice in the form of two different types of tasks sequences affects student learning and choice of learning strategies. The study links the outcome of practice, test, and the various challenges involved in the task sequences to the students' cognitive ability, grades etc.

The third article centres on the activity of the brain from a cognitive and neuroscientific perspective in a test situation when the students have practiced via two different sequences of mathematical tasks.

The fourth and concluding article discusses the challenges provided for students by teacher designed tasks in terms of mathematical abilities and content knowledge. This involves identifying the resource potential of teacher designed tasks to colleagues, researchers and not least student learning.

In the studies, on which the dissertation rests, the mathematical tasks are designed, implemented, and/or analysed. Three of them specifically investigate what students learn when they work on their own with different types of mathematical tasks. It was, however, beyond the scope of this dissertation to study authentic classroom situations.

7.6 Conclusion and discussion

In three of the sub-studies presented in the dissertation, the participants have been working in a non-educational situation either with imitative tasks, to which a solution has been presented, or with creative tasks requiring them to construct a method of solution. The purpose of this design was to test different hypotheses on the correlation between practice and test of the same learning object involving different types of tasks.

The main conclusion is that the type of task students engage with is important for their learning of new things. The participants who were engaged in creating their own solutions were less successful during practice but performed better on the tests in comparison with the participants who were involved in solving the tasks with a given method. The result was not thanks to the participants with the best cognitive resources, but as it turn out, an effect of the fact that the creative-method-designed tasks gave the participants with limited working memory etc. a better chance to learn and reach the intended learning outcome. The results of the sub-studies indicate that in a learning situation consisting of repeated practice of a solution method, the results are closely related to the students' cognitive ability. The investigation shows that tasks inviting the opportunity to be solved through creative reasoning, to a certain extent serve a compensatory function in relation to students' cognitive resources. This means that the participants need not put in so much effort in the test situation if they have practiced creative reasoning.

Although the interventions implemented were brief (e.g., around 30 minutes of active instruction on 14 different tasks sequences), there are differences between the groups. The result indicates that if students are more often faced with the demand to understand the underlying principle of a task in order to solve it, they will learn more effectively. At the same time, it is harder for students to engage in creative reasoning. A certain degree of effort seems to be important for learning (see e.g., Hiebert and Grouws, 2007; Henningsen and Stein, 1997; Karpicke and Blunt, 2011; and Larsen et al., 2008). The point when and under what circumstances the effort becomes an obstacle calls for further investigation.

There is a risk that the potential of a task is not fully appreciated or understood by either teacher or student (e.g., Henningsen & Stein, 1997). This can be explained partly by deficiencies in the teacher-student learning contract (Brousseau, 1997) on what is expected of the students when they are working with mathematical tasks, and partly by the teacher's skills in planning and conducting lessons (Potari & Jaworski, 2002; Rowland & Turner, 2007; van Bommel, 2012). The result of the study on teacher designed tasks includes types of tasks that are perceived as useful in teaching. The educational message in the documents shows that the teachers demand relatively little of the students in the majority of the tasks. Younger students are challenged and given greater opportunities to develop mathematical abilities than older students. The result indicates that there is some uncertainty about how to formulate and use tasks to support the older student's mathematical development. The way the tasks are formulated indicates a lack of discursive tools to clarify the intended educational situation. The importance for the teacher to maintain and develop a professional methodological language, not least for communicating with colleagues, has been emphasised in several studies (see e.g., Grevholm, 2010). It is also a prerequisite for effective development of their teaching practice that teachers can share lesson plans and other documents. It would be unfortunate if teacher designed tasks with the potential to help students develop their mathematical reasoning cannot be put to good use because of inadequate professional language.

In the continued research of the LICR-project, interventions will partly consist of more varied tasks, partly be designed for different student groups, that is, practice-based studies in the regular classroom context (Schoenfeld, 2007). Many more types of tasks are therefore required including tasks for younger students. Teachers are a potential resource both as users and developers of mathematical tasks. One conclusion to be drawn from the study of the educational message, when it comes to teachers' formulation of tasks, is that there are many teachers who design tasks that encourage young students' creative reasoning. A way to ensure that the outcome of the design process will be of value in primary education is to involve these teachers in future efforts.

Referenser

Artigue, M., & Perrin-Glorian, M. (1991). Didactic engineering, research and development tool: Some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 13-18.

Arzarello, F., & Bussi, M. G. B. (1998). Italian trends in research in mathematical education: A national case study from an international perspective. *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 243-262) Dordrecht, Nederlands: Kluwer Academic Pub.

Baddeley, A.D. and Hitch, G.J. (1974) Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The Psychology of Learning and Motivation:* Vol 8 (pp. 47-89). New York, NY: Academic Press

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Paris, France: Seuil.

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 252-269. doi:10.1016/j.jmathb.2011.12.002

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(1), 1-12. doi:10.1080/00207390701464675

Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T., . . . Palmberg, B. (2010). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet: Grundskolan våren 2009*. Göteborg, Sweden: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Biesta, G. (2009). Good education in an age of measurement: On the need to reconnect with the question of purpose in education. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 33-46. doi: 10.1007/s11092-008-9064-9

Boero, P., & Dapueto, C. (2007). Problem solving in mathematics education in italy: Dreams and reality. *ZDM, 39*(5-6), 383-393. doi:10.1007/s11858-007-0051-2

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89-105.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 72-87. doi:10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Brousseau, G. (1988). Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire,* Actes de l'université d'été d'Olivet, édité par l'IREM de Bourdeaux, France.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield Trans.). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 13-58. doi:10.1007/s10649-005-2532-y

Bryman, A. (2001). *Social research methods.* Oxford, United Kingdom: Oxford university press.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35-49.

Cabeza, R., & Nyberg, L. (2000). Imaging cognition II: An empirical review of 275 PET and fMRI studies. *Journal of Cognitive Neuroscience, 12*(1), 1-47. doi:10.1162/08989290051137585

Carpenter, S. K., Pashler, H., & Cepeda, N. J. (2009). Using tests to enhance 8th grade students' retention of U.S. history facts. *Applied Cognitive Psychology, 23*(6), 760-771. doi:10.1002/acp.1507

Case, R., & Okamoto, Y. (1996). *The role of central conceptual structures in the development of children's thought.* Chicago, IL: University of Chicago Press.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. doi: 10.3102/0013189X032001009

Coxford, A. F., Fey, J. T., Hirsch, C. R., Schoen, H. L., Burrill, G., Hart, E. W., . . . Watkins, A. E. (1999). *Contemporary mathematics in context: A unified approach.* Chicago, IL: Everyday Learning Corporation.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 49-97). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2000). *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA.: Sage.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: Obstacles are opportunities. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34*(5), 221-228. doi: 10.1007/BF02655825

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 105-121. doi: 10.1207/S15327809JLS1101_4

Fahlgren, M., & Brunström. M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning.* Advance online publication. doi: 10.1007/s10758-014-9213-9

Glasersfeld, E. von. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-17). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Goodchild, S., Fuglestad, A., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 393-412. doi:10.1007/s10649-013-9489-z

Granberg, C., Olsson, J. (2013). *ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software.* (submitted manuscript)

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education: Ontwikkelen van realistisch reken/wiskundeonderwijs.* Utrecht, Netherlands: CD-beta Press.

Grevholm, B. (2010). Mathematics teacher education: A Scandinavian perspective. In G. Anthony, & B. Grevholm (Eds.), *Teachers of mathematics: Recruitment and retention, professional development and identity.* (pp. 93-100). Roskilde, Denmark: IMFUFA.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal, 28*(4), 567-590. doi: 10.1080/0141192022000005832

Harel, G., & Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany, NY: State University of New York Press.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical task and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics, 28*(5), 524-549.

Herbst, P., & Kilpatrick, J. (1999). "Pour lire" Brousseau. *For the Learning of Mathematics, 19*(1), 3-10.

Hew, K. F., & Hara, N. (2007). Knowledge sharing in online environments: A qualitative case study. *Journal of the American Society for Information Science and Technology, 58*(14), 2310-2324. doi: 10.1002/asi.20698

Hiebert, J. S. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. S., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 371-404). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics Information Age Pub.

Holmqvist, M., Brante, G., & Tullgren, C. (2012). Learning study in pre-school: Teachers' awareness of children's learning and what they actually learn. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 153-167. doi: 10.1108/20468251211224190

Holmqvist, M. (Ed.). (2006). *Lärande i skolan: Learning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur.

Hostetler, K. (2005). What is "good" education research? *Educational Researcher, 34*(6), 16-21. doi: 10.3102/0013189X034006016

Jaworski, B., Goodchild, S., Eriksen, S., & Daland, E. (2011). Mediating mathematics teaching development and pupils' mathematics learning: The life cycle of a task. In O. Zaslavsky, & P. Sullivan (Eds.), C*onstructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 143-160). New York, NY: Springer.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks : A classroom and curricular perspective.* Dissertation, Luleå, Sweden: Luleå University of Technology.

Karpicke, J. D., & Blunt, J. R. (2011). Retrieval practice produces more learning than elaborative studying with concept mapping. *Science, 331*(6018), 772-775. doi:10.1126/science.1199327; 10.1126/science.1199327

Keitel, C. (2006). Mathematics, knowledge and political power. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 11-22). Rotterdam, Netherlands: Sense Publischers.

Kelly, A. E. (2006). Quality criteria for design research: Evidence and commitments. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. E. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 166-184). London, United Kingdom: Routledge.

Kieran, C. (1998). Complexity and insight. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 595-601.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academies Press.

Kiselman, C.O. & Roos, J-E. (2014). Matematik. I *Nationalencyklopedin.* Hämtad från http://www.ne.se/lang/matematik

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Krueger, F., Spampinato, M. V., Pardini, M., Pajevic, S., Wood, J. N., Weiss, G. H., . . . Grafman, J. (2008). Integral calculus problem solving: An fMRI investigation. *Neuroreport, 19*(11), 1095-1099. doi:10.1097/WNR.0b013e328303fd85

Labaree, D. F. (2003). The peculiar problems of preparing educational researchers. *Educational Researcher, 32*(4), 13-22.

Lagrange, J. B. (2002). Etudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques: Quelle place pour les techniques? In D. Guin, & L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques. transformer un outil en un instrument du travail mathématique : Un problème didactique* (pp. 151-185). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Lappan, G., & Phillips, E. D. (2009). A designer speaks. *Educational Designer, 1*(3). Retrieved xx/xx, 20xx, from http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue2/article7/index.htm

Larsen, D. P., Butler, A. C., & Roediger III, H. L. (2008). Test‐enhanced learning in medical education. *Medical Education, 42*(10), 959-966. doi:10.1111/j.1365-2923.2008.03124.x

Larsen, D. P., Butler, A. C., & Roediger, H. L. 3. (2009). Repeated testing improves long-term retention relative to repeated study: A randomised controlled trial. *Medical Education, 43*(12), 1174-1181. doi:10.1111/j.1365-2923.2009.03518.x

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190. doi: 10.1023/A:1003956417456

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29-55. doi: 10.1023/A:1023683716659

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi:10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans, United Kingdom: Tarquin.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically.* [Electronic version]. Harlow, United Kingdom : Prentice Hall.

McKenney, S. E., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. New York, NY: Routledge.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to utopia. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1293-1312). Charlotte NC: Information Age Pub.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education, Athens, Hellenic Mathematical Society,* 115-124.

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. *Proceedings of Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 9, Costa Rica,* 13-24

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (Eds.). (2002). *Kompetencer og matematiklaering*. Copenhagen, Denmark: Undervisningsministeriet.

Nyroos, M., & Wiklund-Hörnqvist, C. (2012). The association between working memory and educational attainment as measured in different mathematical subtopics in the Swedish national assessment: Primary education. *Educational Psychology, 32*(2), 239-256.

Olofsson, A. D. (2008). Lektion. se. *Tidskrift för Lärarutbildning och Forskning,* (3-4), 133-147.

Olofsson, A. D. (2010). Discussions in online learning community forums: Do they facilitate teachers professional development? *The University of the Fraser Valley Research Review, 3(2), 54-68.*

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2011). Mathematical reasoning requirements in Swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 221-246. doi:10.1080/10986065.2011.564994

Pepin, B., Gueudet, G,. & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM, 45*(7), 929-943. doi: 10.1007/s11858-013-0534-2

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(4), 351-380. doi: 10.1023/A:1021214604230

Prabhakaran, V., Rypma, B., & Gabrieli, J. D. (2001). Neural substrates of mathematical reasoning: A functional magnetic resonance imaging study of neocortical activation during performance of the necessary arithmetic operations test. *Neuropsychology, 15*(1), 115-127. doi: 10.1037/0894-4105.15.1.115

Pyc, M. A., & Rawson, K. A. (2009). Testing the retrieval effort hypothesis: Does greater difficulty correctly recalling information lead to higher levels of memory? *Journal of Memory and Language, 60*(4), 437-447. doi:10.1016/j.jml.2009.01.004

Raghubar, K. P., Barnes, M. A., & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences, 20*(2), 110-122. doi: 10.1016/j.lindif.2009.10.005

Rowland, T., & Turner, F. (2007). Developing and using the 'Knowledge quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator, 10*(1), 107-124.

Runesson, U., Kullberg, A., & Maunula, T. (2011). Sensitivity to student learning: A possible way to enhance teachers' and students' learning? In O. Zaslavsky, & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 263-278). New York, NY: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A., H. (2007). Method. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 69-99). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr11.* Stockholm, Sweden: Skolverket

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Steiner, H. (1987). Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,7*(1), 7-13.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York, NY: Free Press.

Swan, M., Binns, B., Gillespie, J. & Burkhart, H. (2013). Numeracy through problem solving. Retrieved 02/11, 2014, from http://www.mathshell.com/materials.php?&series=numeracy

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics : A challenge to our beliefs and practices*. Leicester, United Kingdom: National Institute of Adult Continuing Education.

Säljö, R. (1992). Kontext och mänskliga samspel. *Utbildning och Demokrati, 1*(2), 21-36.

Tate, W. F., & Rousseau, C. (2007). Engineering change in mathematics education: Research, policy, and practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1209-1246). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction - the wiskobas project*. Dordrecht, Nederlands: Reidel.

Umland, K., & Hersh, R. (2006). Mathematical discourse: The link from pre-mathematical to fully mathematical thinking. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 19,* 1-10.

van Bommel, J. (2012). *Improving teaching, improving learning, improving as a teacher: Mathematical knowledge for teaching as an object of learning.* Dissertation, Karlstad Sweden: Karlstad University, Faculty of Technology and Science, Mathematics.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (2006). *Educational design research*. London, United Kingdom: Routledge.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35. doi: 10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Watson, A. (2009). Thinking mathematically, disciplined noticing and structures of attention. In S. Lerman, & B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: Studies on John Mason's contribution to mathematics education* (pp. 211-222) Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 91-111. doi:10.1207/s15327833mtl0802_1

Wiklund‐Hörnqvist, C., Jonsson, B., & Nyberg, L. (2014). Strengthening concept learning by repeated testing. *Scandinavian Journal of Psychology, 55*(1), 10-16. doi: 10.1111/sjop.12093

Zamarian, L., Ischebeck, A., & Delazer, M. (2009). Neuroscience of learning arithmetic - evidence from brain imaging studies. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews, 33*(6), 909-925. doi:10.1016/j.neubiorev.2009.03.005

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland china and the united states. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609-626. doi: 10.1007/s10763-006-9036-9

Lärande i matematik

Det övergripande syftet med avhandlingen är att undersöka hur olika typer av matematikuppgifter påverkar elevers möjligheter till lärande och val av lärandestrategi.

Resultaten visar att i en lärandesituation som består av upprepad träning av en lösningsmetod är elevernas resultat starkt beroende av deras kognitiva förmåga. Uppgifter som ger eleverna möjligheter att lösa dem med kreativa resonemang verkar i viss mån kompensatoriskt i förhållande till elevers kognitiva resurser. Testdeltagare som tränat via kreativa resonemang har en lägre kognitiv belastning.

Studien av lärarkonstruerade uppgifter på internet visar exempel på uppgifter som upplevs som användbara i undervisningen. Uppgiftskonstruktörerna tenderar att ställa förhållandevis låga krav på eleverna i merparten av uppgifterna. Resultatet tyder även på en osäkerhet inför hur uppgifter skall kommuniceras för att stötta elevers matematiska utveckling. De kvalitéer som finns i uppgifterna kommer därför i skymundan.

Matematikuppgifter är centrala i matematikundervisningen. Det är därför viktigt att öka kunskapen om matematikuppgifter och hur dessa kan bidra till elevers möjligheter att utveckla sin matematiska kompetens. Väl utformade matematikuppgifter kan bidra till att minska elevers utantillärande.

urn:nbn:se:kau:diva-31456

ISBN 978-91-7063-546-5

ISSN 1403-8099

DOKTORSAVHANDLING | Karlstad University Studies | 2014:16