Design of a topic-centered research-based teacher guide as support for teachers' planning and teaching, and professional learning

Marcus Gustafsson

Faculty of Health, Science and Technology

Mathematics

DOCTORAL THESIS | Karlstad University Studies | 2026:25

Design of a topic-centered research-based teacher guide as support for teachers' planning and teaching, and professional learning

Marcus Gustafsson

DOCTORAL THESIS | Karlstad University Studies | 2026:25

Design of a topic-centered research-based teacher guide as support for teachers' planning and teaching, and professional learning

Marcus Gustafsson

DOCTORAL THESIS

Karlstad University Studies | 2026:25

urn:nbn:se:kau:diva-109371

ISSN 1403-8099

ISBN 978-91-7867-697-2 (print)

ISBN 978-91-7867-698-9 (pdf)

https://doi.org/10.59217/zwfl3900

Distribution:
Karlstad University
Faculty of Health, Science and Technology
Department of Mathematics and Computer Science
SE-651 88 Karlstad, Sweden
+46 54 700 10 00

Print: Universitetstryckeriet, Karlstad 2026

WWW.KAU.SE

Abstract

This thesis presents a design research project, comprising five papers on the design and implementation of a topic-centered research-based teacher guide for quadratic equations in Swedish upper-secondary school. The thesis aims to explore if and how such teacher guides can be designed to support mathematics teachers in their planning and teaching, and their professional learning. Further, it examines how teachers and their contexts affect conditions for such support.

The papers investigate teachers' existing resource use when planning, previous research on quadratic equations, the design of the teacher guide, and the support found through teachers' interactions with the teacher guide in two cycles of implementation.

The practice of planning and teaching is examined through teachers' interactions with resources, perceiving and mobilizing them in designing instruction. Professional learning is operationalized as developing Mathematical Knowledge for Teaching and is further discussed through the lens of the Documentational Approach to Didactics. A theoretical contribution of the thesis is that the notion of what is educative differs across lenses for professional learning. Previous ideas on educative features in curriculum materials are extended by highlighting how these are interrelated and context-dependent in relation to the support they provide. Such support is found to function differently across stages of planning and teaching.

The findings provide empirical insights into teachers' use of teacher guides, and further suggest that teacher support will be most effective when designed features meet the needs of teachers within their context. For Swedish upper-secondary teachers, this was found to include providing suggestions for lesson activities with rationale, grounded in implications emerging from issues found in research, rather than providing student tasks alone. The designed teacher guide constitutes a practical contribution for teaching quadratic equations.

Acknowledgments

In 2020, I moved with my family back home to Karlstad from 12 years of living in Gothenburg. This journey was more than geographical; it also transformed my way of approaching life. Based on anecdotal empirical studies of experiencing reality subjectively as myself, my doctoral studies have been a mostly pleasant experience, with the occasional downturn during periods of high workload. I could not have done all this work without many important people around me, whom I would now like to thank.

My first special thank you goes to my supervisors, Jorryt van Bommel and Yvonne Liljekvist, who have fruitfully worked in tandem to provide me with the appropriate support at the right time. Both of you, each in your own way, have been an inspiration for who I would like to be as a researcher and as a human being. I will forever be grateful that it was you who were my guides.

My gratitude also extends to my readers and discussants at the different stages: Cecilia Kilhamn, Hendrik van Steenbrügge, and Janine Remillard. Your perspectives and comments provided valuable direction and clarity to my work.

I would also like to acknowledge several contexts in which I had the honor of taking part and that were important for my development as a researcher. The design research course and symposia arranged at Linnaeus University in Växjö in 2023 and again in 2025 provided me with many fruitful ideas and new friends. This was a truly welcoming environment where both senior and beginning design researchers could meet and interact. Further, at the CERME conferences, first online in 2022 and then again in Bolzano in 2025, I met fellow researchers in TWG22 who shared an interest in the resources that mathematics teachers and their students use. Additionally, meeting all the wonderful people focusing on mathematics textbooks in different forms and shapes at ICMT5 in Trondheim constituted another context in which I felt at home. The MADIF conferences over the years have also always provided a friendly atmosphere. A big thank you to all of you who I met in these contexts, for fruitful presentations, talks, and discussions that helped me move forward.

I am grateful to Karlstad University and SMEER for providing me with the opportunity to pursue a doctoral degree. I also wish to extend my deepest thanks to all my colleagues at the mathematics department at Karlstad University, for all the fikas and lunches on floor 5, and for the many friendly encounters in the corridors. To my computer scientist friends who have arranged and enlivened numerous lunch trains, and allowed the occasional sneaking into an extra "fredagsfika" on floor 4, thank you!

There are several doctoral student colleagues who provided support in the different stages of learning to become a researcher. First of all, a big thank you to all students of KÄKK, who made life better during the first COVID years (and the years after), and a big thank you also to students in Lilla SMEER for providing a supportive environment at Karlstad University. Thank you also to my fellow doctoral students in mathematics and educational work who I have crossed paths with during my years at KAU.

In particular, Andreas and Jimmy, we have spent a great deal of this doctoral journey side by side, including more travels together than is probably healthy. Andreas, you had a head start and consequently you finished slightly earlier. And Jimmy, we came into this together, and it looks like we will finish this together. Having been your next-door office neighbor over these years has offered me great joy.

In addition, my doctoral (and doctor!) friends from around Sweden: I will not name you for fear of missing someone, but you know who you are. We have shared courses, Zoom meetings, beverages, and even danced when the opportunity arose. You have really enriched my life beyond the academic, and I look forward to continuing these collaborations.

Further, this thesis would not have been possible without the participating teachers who generously shared their experiences with the teacher guide, both as users and non-users. A big thank you to all of you for your valuable contributions!

And to all my friends from outside academia, thank you for always being with me, even when we are not together.

Finally, an enormous thank you to my mother, father, and brother, Ingegärd, Gerhard, and Tobias, for being around and supporting me and the family in everything, big and small.

And to my wife, Jocelyn, and our boys, Alexander, Elton, and Henry: I really could not have done this without you. You are all my reasons and my constant support.

Karlstad, April 2026
Marcus Gustafsson

Table of content

List of papers

Paper 1. Gustafsson, M., van Bommel, J., Liljekvist, Y. (2024). Resources for planning and teaching mathematics: A Swedish upper-secondary school case study. *Journal of Curriculum Studies, 56*(1), 88–106. https://doi.org/10.1080/00220272.2023.2281912

Paper 2. Gustafsson, M. (2026). Empirical findings on the teaching and learning of quadratic equations: A systematic review. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-026-10493-6

Paper 3. Gustafsson, M. (2025). Designing a topic-centred teacher guide: A case study of quadratic equations. In B. Pepin, I. Kohanová, & M. B. Langfeldt (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT5)* (pp. 205–212). Norwegian University of Science and Technology. https://hal.science/hal-05460770v1/document

Paper 4. Gustafsson, M. (2025). Upper-secondary school mathematics teachers' use of a topic-centered research-based teacher guide. In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/CERME14/hal-05294222v1

Paper 5. Gustafsson, M. *Patterns of interaction and perceptions of support when teachers use a topic-centered research-based teacher guide* [Unpublished manuscript].

Co-authorship

In Paper 1, I was responsible for conducting the initial analysis and drafting the manuscript, and for further revisions of the paper. All authors were involved in analysis and contributed to revising and finishing the manuscript. Author 3 was responsible for the data collection.

1 Introduction

Teachers, when planning and teaching mathematics, rely on a range of resources that function as tools supporting their work of designing and enacting high-quality instruction. The most commonly used resources are c*urriculum materials*, or more broadly *curriculum resources,* such as textbooks and teacher guides, which are also among the most influential tools in shaping teaching (Fan et al., 2013; Rezat et al., 2021; Rezat, 2024). The availability and design of these resources affect both what is taught and how teachers develop professionally through their use. It is therefore important to create more knowledge about how, and under what conditions, such resources can support teachers. This is especially important for understanding how resource design, while taking the context into account, influences support. In this thesis, support is understood as emerging through teachers' interactions with a resource in planning and teaching, through their use and perceptions of affordances.

Through research, we have come to understand that the relationship between teachers and resources can be seen as participatory (Remillard, 2005), meaning that teachers and resources shape the use in an interactive and dialectical way (Brown, 2009). This goes back to sociocultural roots of tools as artifacts mediating action (Wertsch, 1998). When designing instructional activities in planning, teachers perceive and mobilize the resources available to them (Brown, 2009). Through this work, agency for instructional guidance is distributed across the teachers and resources. Resources mobilized not only mediate teaching but can also contribute to professional learning, which can be described as the development of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008). Among such resources, teacher guides constitute a central type of artifact that is specifically designed for teachers.

Teacher guides are intended to support planning and teaching broadly, but ideas that such guides could also support teachers' professional learning are not new (e.g., Ball & Cohen, 1996). Curriculum materials that include features supporting teacher learning are called *educative*. These have been outlined and investigated mainly in the context of teaching natural sciences (Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017). Initially stemming from an American context, such work builds on ideas from Pedagogical Content Knowledge (PCK; Shulman, 1986) as an important form of teacher knowledge. Educative features can, for example, include support for connecting and relating important concepts, information on student thinking, and suggestions for productive explanations. The ways teachers use teacher guides have received some attention, but mainly for teachers of younger students (e.g., Ahl et al., 2015; Buch et al., 2023; Gunnarsdóttir & Pálsdóttir, 2014; Hemmi et al., 2019). In contrast, research on upper-secondary school teacher guides and their use is scarce. Among all types of curriculum resources that have been researched, teacher guides are uncommon (Rezat, 2024), and little research has also targeted teachers' interactions with educative features (Trouche et al., 2023). This highlights an empirical gap that remains to be explored, one that is especially relevant in the context of Swedish upper-secondary school, where the availability of teacher guides is low.

Focusing on the design of teacher guides is important for being able to connect different features to teachers' use. The designed content of teacher guides has been found to be more important for how teaching is enacted than teachers' education level, experience, or knowledge (Stein & Kaufman, 2010). What can be educative, in terms of what actually enables teacher learning, may differ across contexts and subjects. As the main work on design principles for educative features stems from the field of science education (Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017), calls have been made for specific design principles for curriculum resources that are intended to be educative in mathematics education (Pepin, 2018).

This thesis addresses challenges in bridging the research-practice gap (see Hargreaves, 1996) by exploring the design and use of *research-based* resources as a form of knowledge brokering (e.g., Rycroft-Smith, 2022; Rycroft-Smith & Stylianides, 2022), as informing practice is one of the main purposes of mathematics education research (Schoenfeld, 2000). Still, challenges have been observed internationally, both in terms of newly trained teachers' difficulties in interacting with research and in research institutes' challenges in producing and communicating relevant research (OECD, 2025).

Attending to the potential for supporting teachers through resources and research requires an understanding of both the design of teacher guides and how teachers engage with them in practice. Given the scarcity of research on teacher guides, including their designs and educative features, and the challenges of bridging the research-practice gap, this thesis explores how upper-secondary school mathematics teachers in Sweden could be supported through interactions with a designed research-based teacher guide. This is in line with design research in mathematics being visionary, theory-driven, and interventionist (Swan, 2020). Further, as a topical context for ecological validity, *quadratic equations* (QE) is the mathematical concept that the teacher guide focuses on, as this is one of the upper-secondary school topics that is often challenging for students.

Teachers' agency is acknowledged as central in the research design, with the recognition that while research can offer some support, teachers will be the ones determining what is supportive for them. In this way, this thesis also aims to contribute to the understanding of the tension between intended and perceived affordances in curriculum resources (cf. Dietiker & Riling, 2018; McGrenere & Ho, 2000).

1.1 Aim and research questions

Given the introduction, the overarching aim of this thesis project is to explore if and how topic-centered research-based teacher guides could be designed to function as tools to support teachers in planning, teaching and professional learning, and how contextual factors, the role of research, and teacher agency relate to such support. The context explored is Swedish upper-secondary school mathematics teachers and the mathematical topic of QE.

Research questions:

- RQ1: What support for planning and teaching, and for professional learning, can topic-centered research-based teacher guides provide teachers, and under what conditions?
- RQ2: What are design principles for topic-centered research-based teacher guides that support teachers in planning and teaching, and in professional learning?

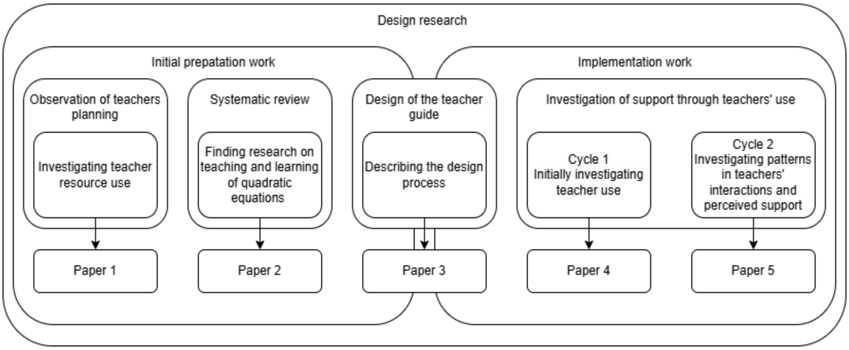
1.2 Overview of the thesis project

In the thesis project, the aim manifested in the research questions was pursued by conducting a series of exploratory steps within the context of teachers planning for teaching in upper-secondary school in Sweden.

The general approach to answering these questions was taken through *design research* (Bakker, 2018), which is here used to frame the thesis project (Figure 1). Aiming to explore if and how teachers could be supported required initial preparation work. First, mathematics teachers' resource use in authentic planning practice was investigated, providing a map that illustrates context and needs (Paper 1). Second, the research literature on the teaching and learning of QE was reviewed, which was eventually done systematically (Paper 2), to inform planning and teaching. Situated at the intersection between preparing and implementing support for teachers in their practice, the teacher guide was designed based on the initial preparation work. The design process was further informed by principles for teacher guide designs from previous research on educative curriculum materials (Paper 3). Implementation through providing teachers with the first version of the designed teacher guide and investigating their use and rationale for use (Paper 4) provided initial insights into what was supportive. Making a revision of the teacher guide and providing it to teachers at a larger scale was the final step, with a focus on investigating patterns of interactions and perceived support, and the influence of teacher and contextual factors (Paper 5).

Following these steps provided insights into how teachers were supported through their interactions with the teacher guide, related to RQ1. By tracing the uptake of the teacher guide's features into teachers' practice, insights were added to how a teacher guide can be designed to achieve such support, related to RQ2.

Figure 1. An overview of the sub-studies of the thesis



1.3 Delimitations

Although acknowledging their existence, this thesis does not focus on digital curriculum resources or generative AI. When this project started, large language models, such as ChatGPT, were not yet present. This explains the absence of AI as support for teachers in the design of the teacher guide. Further, this thesis focuses on teachers and does not focus on students or their learning.

1.4 Outline of the thesis

This first chapter of the thesis has described the rationale for pursuing this thesis project, operationalized into aims and research questions, and has shown an overview of how the individual papers relate to the design research process. It will also in the following paragraph provide an outline of the thesis.

In Chapter 2, the mathematical topical concept of this thesis is presented, together with how it relates to the Swedish curriculum teaching context in which it is introduced. In Chapter 3, the Swedish context is further described, with insights into the characteristics of teachers and their practice, including in-service training initiatives and exposure to research. Chapter 4 provides a description of previous research on teachers' interactions with curriculum resources in relation to planning and teaching and professional learning, and on implementation of research into practice. In Chapter 5, the theoretical framing of the thesis is presented. This includes operationalizations of central concepts of support, planning and teaching, and professional learning. Chapter 6 gives an overview of the design research methodological approach. Chapter 7 provides a summary of each of the included papers. In Chapter 8, the research questions of the thesis are answered on the basis of findings from the individual papers. Finally, in Chapter 9, the findings of this thesis are discussed in relation to theory and to previous research, followed by methodological reflections, contributions, and implications.

2 Quadratic equations

As QE is the topical context for the teacher guide designed in the thesis project, this chapter aims to present a definition and a description of the concepts involved in the topic[1], as well as how these are depicted in the Swedish upper-secondary school context investigated in the thesis work.

2.1 Definition of quadratic equations

A definition of QE is polynomial equations of second degree written in an equivalent form of $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, and its maximum of two solutions are given by the quadratic formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (Kiselman & Mouvitz, 2008).

2.2 Quadratic equations in the Swedish curriculum

In the Swedish curriculum context, the QE described in 2.1, in their *single-variable determinate univariate* form, represent the predominant interpretation (e.g., $x^2 = 2x + 5$). When a quadratic equation includes two variables (the other typically denoted y), it is considered an *indeterminate* quadratic equation and its solutions can be visualized as a graph in a coordinate system, due to the infinite pairs of (x, y) that satisfy the equation. In this sense, indeterminate QE can be seen as functions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x) = ax^2 + bx + c$. This connection, although acknowledged as important, has not been in focus in this thesis project; the focus is on algebra. Unlike international contexts, where QE can also refer to bivariate indeterminate equations (e.g., $y = x^2 - 4x$), representing graphable parabolas, Swedish curriculum materials seldom call the latter QE, but rather quadratic functions.

The quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, is in Swedish curriculum materials divided into three “types” of equations, representing different values of coefficients b and c, with associated solution methods (Sönnerhed, 2011). These types are $ax^2 = b$, solved by the square root method, $ax^2 = bx$, solved by factorization and the zero-product

[1] For findings on the teaching and learning of QE, see Paper 2.

property, and $x^2 + px + q = 0$, solved by methods of completing the square or using the Swedish mathematics classroom version of the quadratic formula, the "*pq*-formula" [2].

From an international perspective, it is worth noting that in Swedish curriculum materials, solving QE by factoring utilizing Viète's formulas is not a common solution method for equations containing quadratic, linear, and constant terms. These types of equations are mostly solved by the quadratic formula or by completing the square.

[2] In Sweden, most common is the reduced quadratic formula, where $a = 1$, such that $x^2 + px + q = 0$ leads to solutions $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, also known as "the *pq*-formula".

3 The Swedish context

In Sweden, school is mandatory from grades 0 to 9 (ages 6–15). Upper-secondary school (ages 16–18) is not mandatory, but is still attended by most youths, as an upper-secondary school diploma is often a minimum requirement for job applicants. There are different tracks to choose from, theoretical or vocational, depending on interest and future career goals. Mathematics in upper-secondary school is taught in courses, with different courses offered depending on the track. The course covering QE comes in three variants, depending on the track: natural sciences/technology track, a humanities/economics track, and a vocational track. The mathematical content is approximately the same across these tracks, but how the content is organized depends on the school and track. Typically, this course is taught during the spring semester of the first year for students in the natural sciences and technology track, while it spans two semesters in the other tracks, beginning in the second year of upper-secondary school.

3.1 Swedish teachers

Mathematics may be taught either by generalist teachers, who teach a range of subjects in addition to mathematics, or by subject teachers, who teach only mathematics and possibly one additional subject. In the Swedish school system, teachers of students between the ages of 6–12 are typically generalist teachers (grade 0–6), corresponding roughly to primary school, while teachers of students between the ages of 13–18 (grades 7–9, and grade 1–3 of upper-secondary school) are subject teachers. Swedish teacher education for subject teachers has undergone several reforms in recent decades. However, a consistent feature throughout has been the requirement of substantial university credits in the subjects for subject teachers, differing from a lower subject-credit requirement for generalist teachers. Mathematics teacher education has been found to provide good overall opportunities to learn, but these are unevenly provided, both in terms of teaching core teaching practices and across different universities (Christiansen & Erixon, 2024). To be permanently employed as a teacher, one needs credentials in the form of a teaching certification, issued by the Swedish National Agency for Education (Skolverket) to those with a teaching degree from a university. The certification is valid for specific subjects and ages, depending on the orientation of the degree.

3.2 Swedish teachers' planning and teaching practice and use of curriculum materials

Swedish teachers report insufficient time for thorough lesson planning and follow-up, and that their time is fragmented (Nordgren et al., 2019). Teachers are to a large degree given autonomy in their planning and teaching practice. This means that they are generally free to teach using whatever methods and resources they want, even though local school environments sometimes decide locally among colleagues. The Swedish curriculum is broadly formulated with a low level of detail, allowing considerable freedom in interpreting what aspects of content to teach, and to what depth. Nevertheless, curriculum materials are often important translators of official curriculum into practice (Fan et al., 2013; Rezat et al., 2021), which has also been observed in the Swedish context (Jablonka & Johansson, 2010). This aligns with studies showing that Swedish mathematics teaching often includes individual seatwork (Boesen et al., 2014; Tengberg et al., 2021).

The available Swedish mathematics curriculum materials to choose from are all commercially produced. For primary school and lower secondary school, student textbooks often come with teacher guide materials available for purchase, whereas for upper-secondary school such supporting materials are more sparsely found; an informal investigation of the market[3] indicated only one major publisher having a printed teacher guide accompanying the student textbook. Up until 1991 the Swedish government organized quality assessment of curriculum materials (Johnsson Harrie, 2009). Since then, the responsibility for assessing the quality of curriculum materials lies with the teachers choosing them. There are no official surveys on the use of curriculum

---

[3] This informal investigation was performed by the author in 2022 by online searches on publishers' websites, webshops, and through visiting publisher booths at the Swedish national mathematics teaching fair "Matematikbiennalen" in Växjö, Sweden, 2022. It is acknowledged that curriculum materials sometimes have some accompanying supplements, often digital, in terms of answer keys, diagnostic tests etc.

materials for mathematics in upper-secondary school. Authors of curriculum materials are often teachers, and some are researchers.

3.3 Swedish teachers' professional development

Teachers' professional development (PD) is the main concept used for describing in-service teachers developing their professional teaching skills, sometimes also discussed as teacher learning, and in this thesis called professional learning. PD is sometimes research-informed. In Sweden, the national research-based PD program "Boost for mathematics" during the years 2013-2017 led to indications of changes in teachers' instructional practice (Lindvall et al., 2021; Österholm et al., 2024). Colleagues can be an important ingredient in successful PD through collaborative lesson planning. However, schools in Sweden do not have sufficient infrastructure for organizing collegial planning and preparation, nor is the time used explicitly to enhance teaching (Nordgren et al., 2021). The potential of PD through everyday teaching with curriculum materials (e.g., Collopy, 2003; Remillard, 2000; Stein & Kaufman, 2010) has not been extensively explored in the Swedish context, particularly with respect to teachers of older students, in upper-secondary school.

3.4 Swedish teachers' exposure to and use of research

Teachers' exposure to research within their everyday practice can be said to be sparse. The concept of research literacy has been made relevant with the entry of teaching on scientific ground and tested experience (SFS 2010:800, 1 kap. 5 §). Teachers being research literate, and 'using' research in practice, comes with challenges (Stolpe, 2021). Teachers are generally interested in engaging with research, but struggle due to lack of time and lack of knowledge about how to access relevant research (Nordgren et al., 2019). Teachers who have been found to engage with research do so based on internal motivation, external motivation, or altruistic motivation (Stolpe, 2024). Internal motivation is characterized by curiosity and a desire to learn. External motivation is characterized by pressure from peers or school leadership. Altruistic motivation is characterized by a desire for students to experience more interesting teaching or to help students learn better.

Curriculum resources are common resources used by teachers, and previous studies in Sweden have emphasized how teaching is often organized around the student textbooks (Boesen et al., 2014), used as a main curriculum resource for organizing teaching (Jablonka & Johansson, 2010). However, curriculum materials in Sweden are generally not explicitly research-based (Helenius & Ahl, 2024). However, one project developed curriculum resources for primary school mathematics teaching in collaboration with teachers (van Steenbrugge & Ryve, 2018), as a form of research-practice partnerships (e.g., Sjölund et al., 2022).

4 Previous research

This chapter presents previous research on central concepts in the thesis. It addresses research on planning and teaching, on professional learning, and on teachers' interactions with curriculum resources, especially teacher guides. Further, previous research focusing on educative curriculum materials is presented. The chapter ends with a subsection providing background on the implementation of research findings in practice.

4.1 Research on planning and teaching, and professional learning

While providing a comprehensive overview of research on teachers' planning and teaching, and professional learning, in mathematics would be overly expansive, some key findings will be highlighted here.

Insights into planning can be seen in the recent overview provided by Cevikbas et al. (2024), where they empirically examined research on lesson planning competence. They showed that teachers, and especially novices, face difficulties in lesson planning. This includes challenges with designing and structuring lessons, anticipating student thinking, and producing high-quality lesson plans. Teacher dispositions, such as knowledge, beliefs, and motivations, affect the planning quality. To plan effectively, teachers need guidance and support to improve their lesson planning. Such support could come from improving awareness of students' thinking, and from effectively using curriculum and teaching resources.

For teaching, Prediger et al. (2022) showed that while research has utilized different approaches: empirical, epistemological, normative, and pragmatic, some principles could be derived that span these approaches. Such principles are that teaching should have conceptual focus, be cognitively demanding for students, have a student focus with adaptivity to diversity, and have longitudinal coherence in how the subject-matter is organized in trajectories. These are principles that Prediger et al. (2022) have used in the design of PD programs for teachers.
Teachers' professional growth is an ongoing continuous process throughout their teacher practice (Clarke & Hollingsworth, 2002).

Such growth takes place through enacting and reflecting on practice, with changes within the personal domain by developing knowledge and updating beliefs, interdependent on experiences from teaching and observing outcomes, and through external stimuli such as curriculum materials or PD. Effective PD has been found to be situated in practice (Borko, 2004), to have strong content focus, to involve active and engaging learning, to be coherent with teachers and with their governing policies, to have enough duration, and to include a collective aspect (Desimone, 2009). Teachers also need tools, organizational support, and expert guidance to learn and enact new reform teaching (Cobb & Jackson, 2012).

Empirical evidence on the impact of teacher knowledge on teaching quality, and consequently on student learning, has highlighted PCK (e.g., Shulman, 1986) as an especially important form of teacher knowledge, in which having strong knowledge of the subject is a prerequisite for developing PCK (Baumert et al., 2010). Using measures of teacher knowledge through the related construct MKT (Ball et al., 2008), it has been shown that teachers that score higher on MKT demonstrate higher quality of instruction (Hill et al., 2008a). Further, teachers with less MKT have been found to have challenges in fully utilizing ideas in curriculum materials (Charalambous et al., 2012), which leads into the next section.

4.2 Teachers' interactions with curriculum resources

Curriculum resources are defined as "all the material resources that are developed and used by teachers and students in their interaction with mathematics in/for teaching and learning, inside and outside the classroom" (Pepin & Gueudet, 2020, pp. 172–173). Much research has targeted curriculum resources in mathematics education, including what they are and how they are used (Rezat, 2024). Cross-cultural studies have shown differences in how curriculum resources are used and conceptualized (Remillard, 2019; Trouche et al., 2023). The types of resources used, and the extent to which they are used, differ between countries and school levels. For example, Kohanová et al. (2025) found that within upper-secondary schools the use of student textbooks, self-generated materials, and digital apps were more common than for lower-grade teachers. Also, primary school teachers used teacher guides to a larger extent than secondary teachers.

4.3 Teachers' interactions with teacher guides

In this thesis, a teacher guide is considered an artifact that can function as a tool, but it is also a type of curriculum resource, sometimes denoted as a text resource (Pepin & Gueudet, 2020). A teacher guide is often linked to a student textbook and is sometimes accompanied by manipulatives or digital resources. Such a collection of resources is commonly called a textbook series. A recent survey on research conducted on curriculum resources (Rezat, 2024) showed that the field is still dominated by research on mathematics textbooks, something that has also received much attention previously (Fan et al., 2013; Rezat et al., 2021). Textbooks can influence what mathematics is taught, the implementation of new instructional changes or reform pedagogy, and students' views and beliefs about mathematics (Rezat et al., 2021).

When teachers read curriculum resources, they have different modes of engagement (Remillard, 2012), meaning what they read, which parts they attend to, or who they are as readers. In parallel, such interactions can be viewed as curricular noticing (e.g., Amador et al., 2017). Texts can also be written to speak *to* teachers or *through* teachers (Remillard, 2012). Remillard (2005) mentions fidelity as a way of describing to what extent teachers follow curriculum materials, and higher fidelity is more likely to be achieved when support in the form of guidelines is provided (Stylianides, 2008). Consequently, the designed content and presentation of the materials read by teachers will affect their use.

The term textbook can be ambiguous. In some contexts, it refers to both the student textbook and the teacher guide, whereas in other contexts it denotes only the student textbook. As teachers are users of both student textbooks and teacher guides, this ambiguity becomes problematic. In Rezat's (2024) survey, only 2 out of 355 studies explicitly addressed teacher guides. Identifying and synthesizing research on teacher guide use specifically is therefore challenging. Much of the research on teacher guides is therefore conceptualized as teachers' use of curriculum materials or curriculum resources.

Research specifically on teacher guides has had different foci (Buch et al., 2023). Research has targeted the content, guidance, voice, or cultural aspects of teacher guides (e.g., Hemmi et al., 2018; Koljonen et al., 2018; Remillard et al., 2026; Stylianides, 2008). In terms of use, teachers have been shown to use the same features of a teacher guide differently (Rezat, 2014), and different teachers use different features (Ahl et al., 2014). Even when noticing or attending to the same features, the ways teachers interpret and make decisions depend on their orientations (Roth McDuffie et al., 2018). Experienced teachers adapt curriculum resources with respect to what they know about students from previous experiences teaching, anticipating how something will play out in practice (Choppin, 2011). In contrast, inexperienced teachers may engage more fully with curriculum resources (Remillard & Bryans, 2004), differing from more experienced teachers (Ahl et al., 2014). Adaptations can also depend on the type of curriculum material used. Choppin et al. (2022) describe two types of curriculum materials as *delivery mechanisms* if they are more scripted and directive, speaking through teachers, or as *thinking devices* if they are designed to speak to teachers with rationale and support for anticipation and reflection. They further found that teachers' adaptations can amplify or counteract curriculum materials' influence depending on if the teacher's orientations towards teaching are in line with one or the other.

Different teacher views on curriculum or the depiction of mathematics matter both in how and to what degree the teacher guide is used (Remillard & Bryans, 2004), and teacher experience can override suggestions from the curriculum material (Superfine, 2009). PD aiming to develop a more flexible use of curriculum materials was found to increase the degree of adaptations (Taylor, 2013). The need for a teacher to learn how to adapt curriculum materials has also been raised by Nicol and Crespo (2006), who found that pre-service teachers failed to fill the gaps between the textbooks and the practice they were to enact. Still, other findings show that teacher guide content affects how teaching is enacted, rather than teachers' education level, experience, or knowledge (Stein & Kaufman, 2010).

Adopting curriculum materials across cultural contexts can come with challenges. Swedish primary teachers teaching with Finnish curriculum materials highlighted challenges in adapting to materials with another cultural embedding (Hemmi et al., 2019). In such a situation, the support offered by the materials was important for changing classroom practice. Such challenges were also observed by van Steenbrugge and Ryve (2018) when developing a new ambitious research-based curriculum program in collaboration with Swedish primary teachers, containing suggestions for practice new to them. These are possible consequences of different countries having different cultural scripts (Stigler & Hiebert, 2009). This is reflected in differences found between Nordic and U.S. cultural contexts in how curriculum materials are used. Remillard et al. (2026) found that Swedish and Finnish teachers relied more on their own ideas for mathematics teaching, and less on following lesson scripts or using teaching techniques from curriculum materials, than U.S. teachers. For adopting the goals, sequencing, and the lesson content of curriculum materials, there were smaller differences across the cultural contexts.

4.4 Educative curriculum materials and teacher learning

Several studies have concluded that teachers can learn from their interaction with curriculum materials (e.g., Collopy, 2003; Remillard, 2000; Remillard & Bryans, 2004; Stein & Kaufman, 2010). In China, learning from textbooks is a common part of teachers' practice (Li, 2004; Pu et al., 2018). Teachers' orientations often determine whether learning potential is realized (Remillard & Bryans, 2004). As previously stated, curriculum materials that can support teacher learning have been called educative (Davis & Krajcik, 2005).

Insights into features of educative curriculum materials stem from two seminal articles, Ball and Cohen (1996) and Davis and Krajcik (2005). Ball and Cohen (1996) proposed that educative features could help teachers anticipate and interpret student thinking, provide examples of student work with commentary, and offer insights into subject-matter ideas and alternative representations, while also making curriculum design principles visible in how to connect lessons across the year. Davis and Krajcik (2005) further proposed design heuristics for educative science curriculum materials, extending ideas that such materials could support the development of PCK (Shulman, 1986). These included providing teachers with ways to enable students to have productive experiences making phenomena available, and warnings about pitfalls with some experiences. Further, they included providing instructional representations and anticipating students' ideas about science, and supporting development of knowledge of the subject. Ideas on what is educative have later been advanced (Davis et al., 2014, 2017). For mathematics, what is educative may take other forms, and Pepin (2018) made a call for such mathematics-specific design principles. Some theoretical work has been done in this direction (Quebec Fuentes & Ma, 2018), but fewer empirical studies have targeted educative curriculum materials in mathematics, especially in relation to teachers' use (Trouche et al., 2023).

Educative curriculum materials have been suggested as support for pre-service teachers in analyzing and planning teaching (Drake et al., 2014; Gibbons et al., 2025). Such support needs to be carefully scaffolded by teacher educators (Drake et al., 2014). In line with such a need are findings that pre-service teachers do not necessarily read educative curriculum materials in ways that enable support (Land et al., 2015). Collaborative work in focused discussions on teaching has been suggested as a supporting structure for learning from educative curriculum materials (Gibbons et al., 2025).

In-service teachers using educative teacher guides are more likely to use a wider range of lesson design considerations (Ahl et al., 2015). Educative teacher guides also provide more opportunities for professional learning, as teacher guides influence how teachers think and prepare for teaching (Gunnarsdóttir & Pálsdóttir, 2014). However, teacher guides containing little educative support can still have an educative impact on teachers (Jukić Matić & Glasnović Gracin, 2021). In relation to other PD approaches, educative curriculum materials have the advantages of being scalable. Heck et al. (2019) isolated and compared three different formats of engaging teachers in professional learning experiences and found that merely using educative materials, if used as intended, could potentially promote teacher learning to the same extent as more costly PD formats.

4.5 The research-practice gap and implementation

One trace of thought that permeates this thesis is the role of research as a basis of informing, making something research-*based* or research-*informed*. Accordingly, some background on this distinction is presented.

The issue of research benefitting, steering, supporting or being implemented into teacher practice has been thoroughly discussed (e.g., Biesta, 2007; Hargreaves, 1996). What has commonly been described as a "research-practice gap" could be interpreted as implying a normative standpoint where practice *should* be "using" research. Such conceptualizations are also suggested by the term *implementation* of research (e.g., Century & Cassata, 2016). A way of acknowledging the professionality of teachers in handling this conundrum is by signaling that the aim for teacher practice is to be research-*informed* rather than research-*based* (Biesta, 2007); the former suggesting a greater extent of supporting teachers in making professional decisions while the latter corresponds to a "top-down" perspective. However, taking the research-*informed* stance is not unproblematic, since exposing teachers to research findings is never an objective endeavor. The choice of presentation of findings both in form and content is a form of top-down steering. In this thesis, I will mainly make use of the term research-*informed* for teaching or teachers, with the meaning described here, as it aligns with the aim and the context in terms of Swedish policy that teaching is to have its foundation in research and proven experience (SFS 2010:800, 1 kap. 5 §). However, the choice of wording as research-*based* is still used, especially for describing products in terms of resources and programs, that have been created through processes that have been research-informed.

The emerging field of knowledge brokering could function as a bridge between research and practice in education, but it is an underdeveloped area of research (Rycroft-Smith & Stylianides, 2022). Attempts at designing research summaries for teachers have highlighted tensions between the priorities of teachers and researchers (Rycroft-Smith, 2022). Teachers often seek topic relevance and accessible language, whereas researchers are generally concerned about evidentiary trustworthiness and methodological transparency, making the accommodation of both concerns a balancing act.

5 Theoretical framing

This chapter presents how central constructs are framed within the thesis. Conceptualizations for support for planning and teaching, and professional learning, are followed by teachers' use of resources, also offering a complimentary view on professional learning through such use. The chapter ends with a subsection describing how the theories will be used in this thesis.

5.1 Support

Support is a concept that can have several meanings. In this thesis, supporting a teacher is understood as providing resources that enables that teacher to achieve something through interacting with them. Support is therefore seen as emerging through teachers' interactions, specifically with the provided teacher guide. In the following sections, framings of planning and teaching, and professional learning, are presented to describe the aspects of teaching practice to be supported.

5.2 Planning and teaching

Teaching is a term whose meaning can be complex due to having (at least) two meanings. It functions as an umbrella term to describe the work teachers do, involving practices of planning lessons, enacting lessons, and reflecting on the enactment. Teaching can, however also, depending on context, refer only to the enactment of lessons.

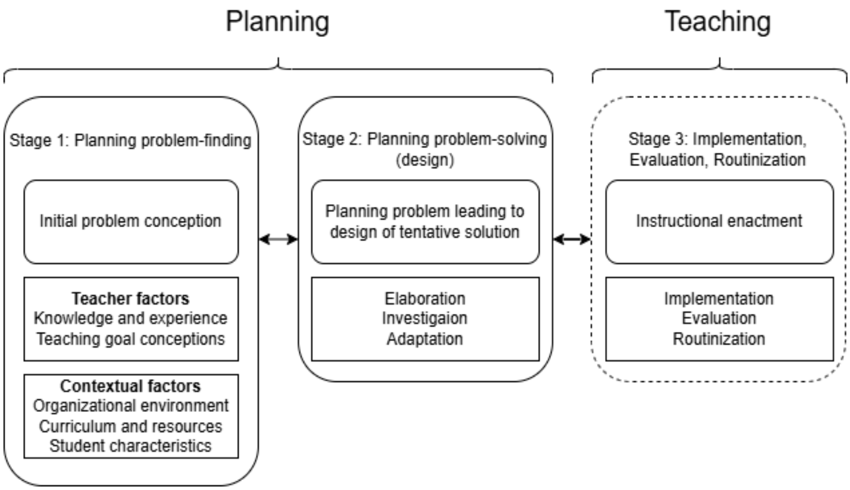
In this thesis, *planning and teaching* is considered one construct that is framed by drawing on ideas from Yinger (1980), where planning consists of three stages: problem-finding, problem formulation/solution (design) and implementation, evaluation and routinization. The first two stages consist of what happens before teaching, commonly known in other contexts as *planning*, whereas the last stage corresponds to *teaching* in the sense of instructional enactment in classrooms. That *planning and teaching* in this thesis is used as one construct acknowledges the difficulties in separating the two. However, emphasis is on the planning stages, as these represent the out-of-classroom situations investigated, while still acknowledging that teaching is part of planning, and planning is part of teaching.

According to Yinger (1980), when planning, there are factors in the environment and organization, in the curriculum and available resources, and in student characteristics that affect the planning process. These factors can be seen as contextual, and act as institutional constraints, framing the general teaching dilemma. Within this framing, teachers use their knowledge and experience, which relate to and influence the teaching goal conceptions in handling the planning dilemma of teaching a specific lesson Yinger (1980). Such factors can be seen as teacher factors, which are connected to the context in which the teacher acts.

These factors shape the stages of planning, and Yinger (1980) describes the first stage as the planning problem-finding process. In this stage, resources known to the teacher, including teaching materials and any source of information that could be used in the classroom, help form an initial problem conception in the planning situation. Once this conception is formed and considered worth pursuing, the teacher enters into the second stage, the planning problem-solving design stage, where the planning problem is further formulated and solved by crafting instructional design. As the problem-solving stage of planning includes revising the initial problem conception, there are overlaps with the former stage. In this stage, design cycles of elaboration, investigation, and adaptation follows until the problem is solved, and a tentative solution is found. Elaboration can be performed in two ways. The first way involves experienced teachers using their existing routines, whereas the second way involves creating new instructional episodes, something that, from an efficiency point of view, requires more effort and is therefore less likely to occur. Investigation and adaptation take place until a satisfactory plan is completed. Afterwards follows the *teaching*, the instructional enactment, when plans are implemented in the classrooms, evaluated, and if successful, turned into routines. This is an ongoing cycle that constitutes a central part of teachers' professional work.

This thesis' framing of planning and teaching, based on ideas of Yinger (1980), is seen in Figure 2. Here, teacher and contextual factors affect the initial problem conception, making up *Stage 1: Planning problem-finding*. In *Stage 2: Planning problem-solving (design),* the initial problem conception is turned into designed intended instruction, through elaboration, investigation, and adaptation. In *Stage 3: Implementation, evaluation, and routinization*, the teaching is enacted in classrooms, less focused on in this thesis, indicated by the dashed contour line.

Figure 2. Planning and teaching, based on Yinger (1980)



5.3 Professional learning

Any meaningful professional work requires opportunities for professional learning. In this thesis, it is acknowledged that professional learning inevitably happens through reflection and enactment within different domains (Clarke & Hollingsworth, 2002). Working with resources with educative features (e.g., Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017) is one way to enable professional learning, as external inputs allowing for professional experimentation within teacher practice. In order to understand such practice, and what is to be learned, there is a need for a description of types of professional knowledge for teaching, together with framings of resource use.

5.4 Mathematical Knowledge for Teaching

The required knowledge to perform the work of teaching has been widely used through the conceptualization of MKT (Ball et al., 2008), which focuses on the specialized work that teachers perform in the various aspects of teaching. MKT is a practice-based, empirically constructed conceptualization that incorporates ideas from PCK by Shulman (1986). Advancing ideas on the division of teacher knowledge into domains of subject matter knowledge (SMK) and PCK, MKT divides the types of knowledge needed to perform teaching tasks within six different subdomains. Three of these correspond to SMK: Common Content Knowledge (CCK), Specialized Content Knowledge (SCK), and Horizon Knowledge (HCK). The other three correspond to PCK: Knowledge of Content and Teaching (KCT), Knowledge of Content and Students (KCS), and Knowledge of Content and Curriculum (KCC). CCK means the more basic mathematical knowledge known to everyone, while SCK is the specialized mathematical knowledge a teacher needs, for example, to be able to see different ways to approach solutions of problems. HCK is the knowledge to see how different mathematical concepts and topics are connected and interrelated. KCS corresponds to the knowledge of how students are likely to think and learn different mathematical content, while KCT involves knowledge of the teaching of mathematical content, including, for example, instructional moves and explanations. KCC is the knowledge of how mathematical content is depicted in the curriculum and in curriculum resources.

These subdomains should be seen as different types of characteristics of the mathematical knowledge required for teaching, rather than as disjunct categories, as these have been found hard to distinguish empirically (Hill et al., 2008b; Schilling et al., 2007). However, regardless of overlaps between sub-domains, higher demonstrated overall MKT in teachers has been shown to be associated with increased student knowledge gains (Hill et al., 2005).

5.5 The participatory relationship, The Design Capacity for Enactment framework and agency

This thesis takes the view of teachers' work with resources through the participatory relationship (Remillard, 2005). Aligning with such a relationship and drawing on socio-cultural roots of tools as artifacts mediating action (Wertsch, 1998), Brown (2009) built a frame around what he called the Design Capacity for Enactment (DCE) framework. In the framework, it is acknowledged that different kinds of curriculum resources as artifacts used by teachers can enhance the capacity for what is possible to accomplish. Artifacts mediate action, and so a curriculum resource has affordances and limitations on what action is possible.

When designing instructional activities, teachers perceive and mobilize the resources available to them (Brown, 2009). Design is always purpose-driven, and affordances are perceived towards such purposes. Perceiving can be conceptualized as teachers reading, interpreting, and evaluating curriculum materials (Remillard, 2019). Different degrees of artifact appropriation in the mobilization of the resources in designing instruction are termed *offloading*, *adapting,* or *improvising* (Brown, 2009). *Offloading* corresponds to using a resource as it is, distributing agency to a larger degree onto the resource to do the work. *Adapting* means modifying the resource to fit the current situation, and *improvising* means starting off with the original intent of the resource but to more freely act on a solution according to the teacher's own will, maintaining agency within the teacher. Teachers' ability to perceive and mobilizing available resources in instructional design are formulated as their *Pedagogic Design Capacity* (PDC) (Brown, 2009; Remillard, 2018), meaning approximately their ability to participate with and utilize resources in productive designs of instruction. Such capacity relates to notions of planning competence (Cevikbas et al., 2024). In this thesis, it is acknowledged that different teachers have different PDC and planning competence, but this is not measured or evaluated, only indirectly through other notions of teacher knowledge and learning. It is further acknowledged that the DCE framework includes more components than the ones described and used for this thesis. In particular, Brown's (2009) notions of curriculum resources and teacher resources are here modelled by the teacher guide and its features, and by MKT (Ball et al., 2008), respectively.

Further elaborating on the notion of teacher agency, it is acknowledged that agency has been conceptualized and operationalized differently within different traditions and can be seen on different levels. In this thesis, a teacher's agency is understood as the capacity to make decisions and act according to goals and beliefs. Such capacity is less constrained in more autonomous environments. In relation to Brown (2009), the enactment of such capacity takes place in the situation of planning and teaching, where the guiding influence is distributed across the teacher and resources, given the affordances and constraints of the available resources and the context. When shifting the distribution of agency towards the resource, the resource may, in this thesis, be said to be given authority.

5.6 Teacher professional learning and the Documentational Approach to Didactics

The Documentational Approach to Didactics (DAD; Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020) was not initially the main analytic lens for the thesis project. Rather, it emerged a posteriori as a useful perspective for interpreting teachers' work with the teacher guide within a larger set of resources and will later be discussed in relation to the evolution of teachers' resource systems as well as to the notion of what may count as educative.

In DAD, teachers' professional learning is in focus in terms of their ongoing teaching work using sets of resources in a *resource system*. The notion of resource is broad, and includes material (and digital) artifacts, but also a wider range of conceptualizations of resources such as conversations with colleagues or time. In DAD, teachers' activities outside the classroom and how these are situated within institutional conditions and constraints are in focus (Gueudet & Trouche, 2009).

DAD can be said to expand from the instrumental approach (Trouche, 2020). For Rabardel (1995/2002), an *instrument* is a "subject's use of the artifact as a means he/she associates with his/her action" (p. 18). This emphasizes that an artifact is not a finished instrument, but rather that it remains to be "inscribed in use" (p. 65). Further, an artifact is used through *utilization schemes*, which are "stable and structured elements in the user's activities and actions" (p. 65). An instrument is therefore a psychological construct bringing together an artifact component with one or more associated utilization schemes. The development of an instrument is called instrumentational genesis, made up of the two dimensions *instrumentalization* and *instrumentation*. Instrumentalization corresponds to how the subject shapes the use of the artifact, while instrumentation corresponds to the artifact shaping the subject's usage, and both these processes are intertwined through the use.

A scheme, according to Vergnaud (1998), is “the invariant organization of behavior for a certain class of situations“ (p. 167). Schemes have four components “1. goals and anticipations; 2. rules of action, information seeking, and control; 3. operational invariants; 4. possibilities of inference” (p. 173). This can be described with for any class of situations, a subject has goals, which his or her action is oriented towards meeting. These goals and actions are informed by operational invariants which consist of propositions that are held to be true by the subject (called *theorems-in-action*) and selections of information from different categories of representations relevant to the subject (called *concepts-in-action*). These operational invariants also influence how inferences can affect the rules of action. Operational invariants are often invisible (Gueudet & Trouche, 2009). However, if one sees teacher behavior as governed by internal schemes in terms of Vergnaud (1998), one can construct possible schemes through observing teachers.

Extending the notion of an instrument analogously to the instrumental approach (Rabardel, 1995/2002; Trouche, 2004), in DAD, a *document* is an outcome of a teacher’s appropriation of a *set of resources* together with a *scheme of utilization*, using the definition of scheme given by Vergnaud (1998). However, the concept of utilization is here used for non-stable behaviors while *usages* instead correspond to a stable organization of activity (Gueudet & Trouche, 2009). Through the work of teachers using resources in specific ways and creating documents, they can be said to perform documentation work. Over time, this constitutes teachers’ documentational genesis (Trouche et al., 2020). Gueudet and Trouche (2009) emphasize that documentation work is ongoing, and that resources and documents influence each other in a dialectical relationship as resources turned into documents become new resources.

DAD recognizes that curriculum material use and teacher learning (if ‘learning’ is seen as PD) are two intertwined processes (Gueudet & Trouche, 2009). This PD takes place within the documentational genesis, with a special interest in teachers’ activity outside the classroom. However, even though DAD sees teacher PD as intertwined with this practice, there is no explicit model for the nature of knowledge learnt by the teacher within the concepts of DAD, if one does not see teacher learning in a more general sense as a change of practice.

5.7 The theories' relations to the thesis

The presentation of findings from the individual papers has been aided by conceptual frameworks. This includes the more empirically formed concepts of educative curriculum materials (e.g., Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017), and MKT (Ball et al., 2008), as well as the more socio-culturally rooted DCE framework by Brown (2009), which has been included in the notion of the participatory relationship between teacher and curriculum (Remillard, 2005). As previously mentioned in relation to DAD (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020), the findings of the thesis will be revisited in the discussion, relating notions of educative curriculum materials, DCE, MKT and DAD.

6 Methodology

In this chapter, the design research approach taken to pursue the thesis' aim is described. The chapter begins with providing an overview of the choice of methodological approach, continues by describing the process of designing the teacher guide and implementing the cycles, and ends with ethical considerations.

6.1 Design research

Design research is a type of flexible design suitable for exploratory work (Robson & McCartan, 2016). Its main characteristic is that it is cyclic and iterative (Bakker, 2018). It can be seen as didactical engineering, that "something has to be made with whatever theories and resources are available" (pp. 48–49). One goal of design research is to gain actionable knowledge, that is "knowledge about which actions under what circumstances will lead to which kind of intended consequences" (p. 47). A design study is often used to try to make education better, meaning elaborating on "as it could be, or even how it should be" (p. 3). It is often interventionistic, trying a new innovation (Cobb et al., 2003). A design research approach therefore aligns well with the aim of this thesis.

One goal of design research can be to generate actionable knowledge in the form of design principles, which is part of the aim of this thesis, articulated through RQ2. Design principles have historically had several meanings. Some possible meanings include values or ethical norms, criteria, guidelines, heuristics or advice, predictions, or altogether a more general description: "a generalized design practice, with norms and documented history in a generalized and argumentative form so that it can be re-enacted when and where appropriate" (Bakker, 2018, p. 52). Van den Akker (1999) proposed a way to report such principles, which has been influential in the design research community. A design principle should include descriptions of the product and/or intervention, the context for where it is valid, its characteristics both in substance and for implementation, and arguments for why it is valid.

Every design research study in education starts with a state of practice in need of change in one or several aspects (Plomp & Nieveen, 2013). A goal image of a new, improved state of practice is set, and an intervention is designed to address the making of the change needed. This process operates in small research cycles, with every implementation phase ending with a thorough analysis and evaluation. By reflecting upon the results, the process leads to a redesign, which once again becomes the start of a new cycle.

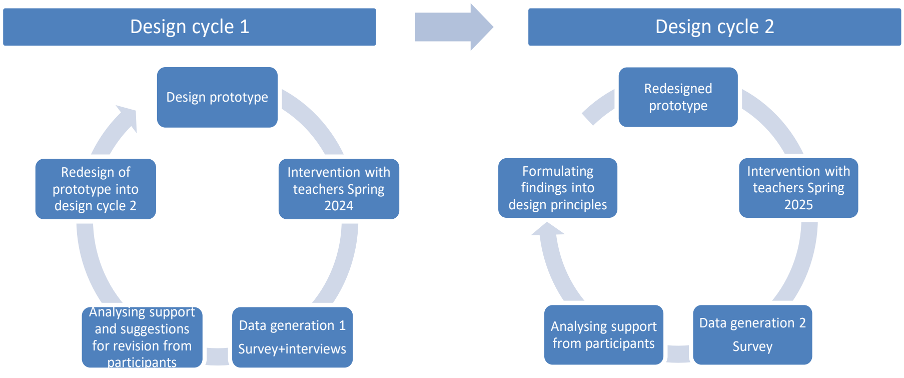
Design research aims to generate both practical and theoretical contributions, by demonstrating "what works" in a pragmatic sense, while also enriching theory concerning the design and the process of implementation. This is sometimes referred to as development studies and validation studies, and most studies are a combination of both (Plomp, 2013), including the study constituting this thesis.

6.2 The design research project of the thesis

In this thesis work, the design research project consisted of designing a teacher guide for upper-secondary school teachers in Sweden, with the intent to support them in planning and teaching, and in professional learning. This was enacted through designing and providing a teacher guide for use within their existing resource system, aiming to inform teachers in various aspects. This need was guided by the findings from Paper 1, in terms of limitations of the teachers' current resource system for planning to teach. The decision to design a guide for informing teachers through centering on a mathematical topic was strongly informed by the findings from Paper 1, as well as by insights from previous research that successful PD initiatives have a strong content focus (Desimone, 2009). The topic of QE was chosen for several reasons: QE are a part of the Swedish upper-secondary school mathematics curriculum where students often struggle, the course is typically given at the start of the spring semester, making data generation feasible, and it was assumed to be substantial enough to cover typically 5-10 hours of lessons to constitute a reasonable size.

An overview of the design cycles is given in Figure 3. In the fall of 2023, the guide was designed (described in Paper 3), based on the initial findings from context (Paper 1) and findings from research on QE, which had not yet been investigated as systematically as in Paper 2. The guide was first tested with teachers in the first cycle (cycle 1), in the spring of 2024, with outcomes described in Paper 4. Revisions were made in fall 2024, based on the support seen through teachers' use and perceptions of the guide, in relation to the initial designed features. In the second cycle (cycle 2), in the spring of 2025, the guide was distributed to a larger number of teachers. This enabled investigation of how patterns of interaction and perceptions of support emerged on a larger scale, which is described in Paper 5.

Figure 3. An overview of the design cycles



The expected output of the design, which was to support teachers, needed an operationalization. Support for planning and teaching was therefore seen through interactions according to the theoretical framing (Brown, 2009), in terms of teachers *perceiving affordances* and *mobilizing* teacher guide features in their design of instruction. Support for professional learning was operationalized as teachers developing MKT (Ball et al., 2008).

6.3 The designed features of the teacher guide

In this section, a description of how the teacher guide was designed and the rationale for the design is presented. As the research in design research is design-based, and the design is research-based (Bakker, 2018), there were three ways in which research informed the design:

1. By basing the form of the guide on previous research, that is, what types of features are included, such as features of educative curriculum materials (e.g., Davis & Krajcik, 2005).
2. By basing the content within the different features on findings from research, such as findings from the context in which it will be introduced (Paper 1), and from teaching and learning of the content of QE (Paper 2).
3. By embedding theoretical principles for teaching that intend to build students' conceptual understanding, most clearly in this design by ideas from variation theory (e.g., Lo, 2012).

The process of designing the teacher guide will be described here in order to be able to discuss the revision work between cycle 1 and cycle 2. It also serves to answer RQ2 regarding features that might be supportive. This process of designing the teacher guide has also been in focus in Paper 3.

For the first cycle design, inspiration was taken from the notion of conjecture maps (Sandoval, 2014) as means to keep track of the design. Previous research on educative curriculum materials (e.g., Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017; Pepin, 2018) was surveyed for ideas on what could possibly be supportive for teachers in other contexts. Drawing on such literature together with findings from the current context on what could be supportive (Paper 1), content features and characteristics of such possibly educative features were organized according to conjectures that they could be supportive for teachers. These are presented here as features stemming from educative literature (E) or from the context (C) (and were also included in Paper 3).

Content features included

(1) possible student difficulties including (mis)conceptions (E)
(2) suggestions of instructional activities addressing student difficulties (E)
(3) representations of the mathematical content and how it relates to other content (E)
(4) student example works and teaching examples (E)
(5) guidance for reviewing and assessing student work (E)

Characteristics of content features

(6) based on research (C)
(7) embed features within theoretical or didactical models (C)
(8) align with teacher ideas on teaching and teaching practice (C)
(9) based on proven experience (C)
(10) align the content with official documents and common curriculum materials (C)
(11) provide transparency and rationale (E)
(12) speak to teachers as well as through them (E)
(13) act as a helpful colleague (C)
(14) include a variety of types of content to suit different teachers' need (E)
(15) include easily modifiable features to fit teachers' individual context (E)

The initial designed teacher guide, including these content features and characteristics of the content features, consisted of 4 expository texts, 4 activities and 5 types of tasks, described in the following.

Expository texts

The expository texts were the first main designed support to inform teaching. The first text was a research summary building on findings of research on the teaching and learning of QE, including issues to be handled. The second text was a narrative from teacher experience written from the author's own experience and discussions with teacher colleagues over the years. As a third text, information on QE in the Swedish curriculum context was written based on reviewing common textbooks and official documents. The fourth text consisted of a deepened commentary on suggestions for teaching based on the findings, which was written by the author drawing on the double role of having been a teacher and now being a researcher.

Activities

The activities were designed to support addressing the issues described in the expository texts. Activities 1 and 4 were designed to contain grouping and sorting exercises, drawing on ideas from variation theory (e.g., Lo, 2012) to elicit and notice different aspects of the mathematical objects. Activity 1 targeted important pre-requisite concepts while introducing QE, and activity 4 focused on strategies for solving QE of different forms and types. Activity 4 was further inspired by a lesson available in the Underground Mathematics online resources[4], developed through the Cambridge Mathematics program. Activity 2 also addressed strategies for solving QE, but was organized as seated pair-work in a normal classroom setting. Activity 3 dealt with systematically investigating the number of solutions to QE by observing the discriminant for different coefficients of complete QE, in a teacher-student whole-class situation.

Tasks

The tasks were added to support teachers' practice of finding tasks. These included an organized collection of all freely available previous national exam tasks that dealt with QE, tasks with solved examples with students' common mistakes to find and correct created from issues found in research, links to some chosen challenging tasks on QE from the nRich[5]-project, a quick reference for choosing solving methods depending on QE forms and types, and exit tickets to use to assess students' skills in solving QE.

In the initial design, teachers' agency was considered important not to interfere with, so that the teacher guide would not steer the way teachers would use it, nor lead them to use it only because they received it. The tone of the voice in the teacher guide was therefore consciously chosen to balance between talking *to* and talking *through* teachers, with the balance shifting towards talking to the teachers. Effort was made to signal many of the formulations regarding how research findings should be interpreted cautiously, for instance "This might indicate…" or "This could mean that…" rather than "This means that…". This was partially due to the corresponding intended educative feature, but also because the findings from research in general did not constitute clear recommendations on the teaching and learning. As teachers' professional judgment and their needs needed to come first, the teacher guide did not include wordings that teachers *should* do

[4] https://undergroundmathematics.org/quadratics

[5] https://nrich.maths.org/

something, but offered possibilities of what they *could* do. This was further emphasized in that activities were formulated as suggestions, and that they had not been tried out in classrooms before. The expository texts, the activities and the tasks were informally reviewed by experienced colleagues at the university, either with experience from teaching, task design, or both.

6.4 The revision of the teacher guide

The findings from the teachers' use of the teacher guide in the first cycle (Paper 4) showed that most of the conjectures on content features that were supportive were actually, to some extent, realized in terms of the designed intentions.

For the second cycle, the teacher guide was shortened by making the expository texts shorter and more streamlined, due to teachers' time being reported as a constraint for reading. Work was therefore put into making sure that the first research summary was easier to read, by structuring it more clearly according to different forms of QE and the accompanying methods for solving them.

Methodologically, it was in some cases in the first cycle also hard for the teachers to answer what expository texts they had read in the beginning, as they did not always know which section included the content they referred to in interviews. To be able to better assess whether teachers read merely the research summary or continued reading the whole text, the expository texts were reorganized for the second cycle. The research summary was still first, but the activities and tasks were placed straight after, before continuing with the rest of the expository texts. This was intended to work as a "barrier" between the texts, to see if the research summary was perceived as enough to read before going into instructional design with the help of activities and tasks.

In the first cycle design, two of the expository texts were in some ways based on teacher experience, which led to ambiguity for teachers in knowing what was based on teacher experience and what was based on research. Therefore, these two expository texts, a narrative from teacher experience, and a deepened commentary on suggestions for teaching based on the findings from research, were rewritten and combined into one expository text. The information on QE in the Swedish curriculum context, which in general was not used or valued by teachers in the first cycle, was kept as it was, resulting in 3 expository texts after the revision instead of 4 as in the first cycle.

The findings from the first cycle (Paper 4) also showed that the teachers gave authority to the teacher guide due to the research framing. This was not only in relation to the guide itself, but also to the research framing of receiving it through a research project from a university. Efforts were therefore put into further reducing the strength in communications with teachers for the second cycle. Especially emphasized was that nothing needed to be used at all. Formulations in the guide were once more looked over, to even more emphasize uncertainty and reduce the apparent strength of the findings when possible.

In the first cycle (Paper 4), the activities were used to a larger extent than the tasks, and the connection between reading about an issue in the expository text and using the corresponding activity were explicated by several teachers. However, the initial teacher guide design did not provide such explicit explanations for what issue connected to what activity. Therefore, in the revision, four issues were named from the research summary and connected to the activities to further help explicate this connection for teachers in the second cycle. The tasks containing common mistakes were in this work changed into an activity instead, Activity 5, with included rationale and suggestion on how to enact this in a classroom. As teachers had used the activities in the first cycle and reported on their use, for the second cycle more information on possible ways to modify or adapt the activities was added.

Further, mistakes, typos and incorrect or incomplete statements found by teachers and the author were corrected.

In summary, the revised teacher guide for cycle 2 consisted of 3 expository texts, 5 activities and 4 types of tasks (and can be found in Appendix A).

6.5 The data-generating instruments and process

The data-generating instruments for cycle 1 and cycle 2 can be found in the Appendix. For cycle 1, a survey was created to target teachers' use (of specific features of the guide) and their reasons for use, as well as to gain insights into the support perceived in planning and teaching, and in professional learning (Appendix B). For cycle 1, complementary interviews were conducted with the teachers. For this, an interview guide was created targeting different areas: the expository texts, the activities and tasks, general questions about the guide's characteristics, relation of the use of the guide with organizational conditions and teacher preferences, and about the perceived support and effect on the teacher (Appendix C). The teachers' survey answers were added to this interview guide, so that each interview targeted the specific uses previously reported, asking follow-up-questions. Even though the interviews provided some new insights, the answers found in the interviews largely overlapped the survey answers, indicating that the surveys as a whole captured many of the important aspects of use.

For cycle 2, the initial survey was expanded to include more fixed-items and fewer open-ended items, to enable the possibility of more descriptive and light inferential analysis, to quantify patterns suggested by findings from cycle 1 (Paper 4). Further, less emphasis was placed on questions related to a revision, and on details on the use of the tasks. The initial findings from Paper 4 steered item-construction for the cycle 2 survey, as this was expected to be of a larger scale. The survey items for cycle 2 were gathered at two different points in time. First, when teachers registered to access the guide and the study using a link provided to them in the information letter they received through their principals, background information was collected. This pre-use survey included their teaching experience in years and times they had taught QE before, and Likert items on perceived time for planning, availability of collegial support, and interest and habit of consuming research. The rationale was to be able to say something about the sample of teachers, and to identify if there were patterns in what teachers answered the post-use-survey. The registration survey is in Appendix D. The post-use survey (Appendix E) included items on context: school, credentials, groups taught, group-size, lesson time allocated to QE, curriculum materials and other resources used for the entire course, and if planning was individually or collegially. Likert items on the interaction with the teacher guide included: the reading and evaluation of expository texts, what activities were used, how they were used in terms of adaptation, and the use of tasks. Reasons for using activities were asked as a free text answer. Further, the post-use survey included items on how texts and activities were perceived and ratings of support from them in different aspects of planning and teaching. Items were also constructed to reflect the teachers' perceptions of the effect of their interactions with the teacher guide as a whole on support for their planning and teaching, and for their professional learning. Some items were constructed to reflect to what extent the amount of use was dependent on the research framing in different aspects, building on findings from cycle 1 (Paper 4). Also, an open-ended free text answer question on the main benefits and challenges of having access to the teacher guide in planning was included.

The survey instrument for cycle 2 was designed and sequenced in such a way that the open free text answer questions came before any questions asking for specifics, to reduce the effect of questions affecting what teachers would mention. For example, questions for reasons for use were put before items that required teachers to rate different kinds of support in relation to their use. Questions asking for the main benefits and challenges of having the guide were placed before those focusing on support for professional learning. The length of the survey also imposed limitations on the design and the number of items that could be included, in order to prevent responder fatigue and follow the guidelines communicated to teachers when agreeing to participate.

Items on perceptions and use were posed in order to get insights into teachers' perceptions and types of mobilizations in terms of adapting or offloading (Brown, 2009). Items on professional learning were posed in relation to subdomains of MKT (Ball et al., 2008). Item construction in general was guided by guidelines on survey construction provided by the Swedish central bureau of statistics (Persson, 2016), and the surveys were piloted by colleagues who also had experience of being a teacher.

6.6 Participants and data generation

The participants in Papers 1, 4 and 5 are to some extent also described in the papers and in the summary of papers (Chapter 7). For the sake of the design research cycles, additional details on the participants and the data generation are provided here.

In cycle 1, which took place in spring 2024, teachers were recruited through the author's professional networks. Out of 10 initially asked teachers, 6 teachers from 4 different upper-secondary schools were able to both answer the survey and be interviewed. Surveys for both cycles were constructed and distributed digitally through the tool Survey & Report, supplied by Karlstad University. Interviews took place face-to-face at participants' schools, and were recorded on a voice recorder. In cycle 2, which took place in spring 2025, teachers were recruited through emails sent to principals at the start of the semester. As a result, 100 teachers registered to receive the teacher guide. Out of these, 93 were eligible for the post-survey, due to teaching QE sometime during the semester. Surveys were sent out after teachers had reported they had completed teaching QE, which they reported at registration. All eligible post-survey teachers were sent reminders a maximum of two times. A total of 68 teachers answered the post-survey, and 55 of these reported to have used the guide. These 55 teachers came from 49 different schools, with a large variation in experience. The 13 teachers answering the post-survey but reporting not to have used the guide did not clearly differ in distribution of experience, and came from different schools.

6.7 Ecological validity

In any design research project, matters of ecological validity (Swan, 2020) are important in order for the designed resource and derived principles for design to be able to work outside of the project. To ensure such ecological validity, several efforts were made in this thesis work. First, it was an important part of the framing of the intervention not to demand any use by teachers, and to ensure that the guide would be able to function within any sort of existing resource practice. The first cycle prototype was tried out and probed thoroughly in questions of suitability and reasonability of the suggestions for activities and texts, before scaling up to more teachers. Second, to increase ecological validity and strengthen transferability of findings to other contexts, it would be preferable to include a range of teaching experience, represented across different types of schools, types of collegial communities, and geographical spread. The combined participants from cycles 1 and 2 represent such a range of teaching experience and contextual diversity.

6.8 The methodological approaches of the papers

This thesis combined several methodological approaches and methods, most within the qualitative research paradigm. In Paper 1, thematic content analysis (Kuckartz, 2019; Robson, 2016) was employed on transcriptions of audio recorded teacher discussions in order to map resource use in planning. The thematization was related to previous conceptualizations of curriculum resources. Paper 2 employed a systematic configurative review approach (e.g., Gough et al., 2017), with qualitative analysis inductively and deductively organizing findings on teaching and learning QE (Kuckartz, 2019).

The final part of the thesis project, described in Papers 3, 4 and 5, is in this thesis framed within a design research (Bakker, 2018) approach. Within these approaches, the design and analysis were based on contextual factors from Paper 1, informed by findings from research on QE, and on principles for educative curriculum materials (e.g., Davis & Krajcik, 2005). The analysis conducted in Papers 4 and 5 utilized the theoretical framing of Brown (2009), mapping and thematically categorizing (Kuckartz, 2019) statements of perceptions and mobilizations in relation to the teacher guide's different features. For Paper 5, categories relating to MKT (Ball et al., 2008) were used deductively for item construction. Some quantitative analysis, mainly descriptive but with light inferential analysis, was conducted in Paper 5.

6.9 Ethical considerations

Throughout the thesis project, considerations have been taken to the ethical dimensions of the research conducted.

The design research implementation studies reported on in Papers 4 and 5 were conducted in accordance with ethical guidelines (Vetenskapsrådet, 2017) and the project was reviewed at the local ethics committee at Karlstad University (HNT 2023/733), rendering no need for ethical approval at the national ethics committee, due to absence of sensitive data. All participants included in the study gave informed consent to participation and handling of data. Further, all data from participating teachers were stored and handled in accordance with GDPR, by following guidelines of data handling from Karlstad University.

The first observational study, rendering Paper 1, utilized data generated through a previous research project ethically reviewed (C2018/100) and funded by VR [2021-04766]. All participants had given informed consent.

Paper 2 and Paper 3 did not include participants. The systematic review in Paper 2 was conducted and reported with transparency, and used an inclusive approach to findings from different contexts, favoring equity over methodological quality. Paper 3 reported on the design process, with the author's own informed consent.

Also, an ethical approach was embedded in the entire thesis project's design. The framing of having teachers voluntarily choose whatever they wanted to use, and not having to use anything from the designed teacher guide was a conscious choice, as the focus lay on how to support teachers within their everyday practice. This included not imposing any sort of teaching on them, but informing and offering opportunities. However, it must be acknowledged that providing someone with something is never free of values. As was found, the trust that teachers put in the material due to the research framing was considerable. Keeping the number of participating teachers in the first cycle low was an intentional choice, in case any unwanted or unethical practices were to emerge through the interaction with the teacher guide. The teacher interviews in the first cycle also sought to probe the extent to which teachers felt obliged or forced to use anything from the teacher guide, making sure teacher agency was maintained. The communication to teachers throughout the project in both cycles emphasized that teachers could use whatever they wanted, however they wanted, including not using anything at all.
Teachers were not paid to participate, nor did they (to the author's knowledge) get any extra time from their employers to participate. For

that reason, the amount of time taken from them in terms of generating data for the research project was intended to be minimal. For the first cycle, teachers agreed to read the guide for 30 minutes for orientation, answer a survey for 20-30 minutes, and if they agreed to be interviewed for up to 60 minutes. This was assumed to be a reasonable time and effort invested. Time used for planning and teaching using the guide was also within teachers' normal practice, something that was also verified as reasonable by teacher statements in interviews. For cycle 2, as there were no interviews, the impact on teachers' practice due to data generation was even less.

7 Summary of the papers

In this chapter, a short summary of each paper is presented to provide a backdrop for Chapter 8 in which the main findings of the thesis are presented with references to the papers.

7.1 Paper 1

Title: Resources for planning and teaching mathematics: a Swedish upper-secondary school case study

Paper 1 is a qualitative case study examining what resources Swedish upper-secondary school teachers use when planning to teach mathematics, how they are used, and for what reasons. The data consist of 13 sessions of audio-recorded collegial planning meetings with three groups of 2-5 teachers for a total of 631 minutes, which were analyzed through thematic content analysis of transcribed recordings.

The study shows that a wide range of resources were used, including curriculum resources such as student textbooks and official documents, digital resources, self-generated documents, colleagues, and didactical models. However, what resources were used for differed. The student textbook and official documents were the main resources used for selecting mathematical content to be taught, in terms of representations of the mathematics, tasks, and overall sequencing. Resources used for instructional design were colleagues, teachers' own experience, and old created lesson notes, together with cognitive resources. Resources that could be used as tools for student use, or for teacher demonstration, like student textbooks and dynamic software, were found to support the enactment of teaching.

When planning, reasons for using resources were to handle the practical teaching context, including ensuring usability and managing time, while aligning content with the curriculum. Teaching focused on what teachers and students should do, show, or realize, while taking into account students' pre-requisite knowledge and student group properties. For a resource to be used, it was found to need to be given authority. This could be done either by explicitly supporting a teacher's need to realize teaching, or by aligning with teachers' views of what is important.

In all, Paper 1 illuminates a gap in external resources for instructional design in terms of how to teach a lesson. Further, it shows that the design of such external resources must meet the needs of teachers for them to give authority to the resource. This could be done by making sure that what is going to be taught aligns with curriculum materials and official documents. Such designed resources should also have the tone of a helpful colleague and provide a rationale for instruction.

7.2 Paper 2

Title: Empirical findings on the teaching and learning of quadratic equations: A systematic review

Paper 2 is a configurative systematic review of the teaching and learning of QE. Data were searched for in the databases ERIC, PsycINFO, Scopus and Web of Science for findings on teaching and learning of QE. A total of 38 papers, investigating mainly secondary school students aged 13-17 from different countries, are included as data. The analysis was divided into three foci: influences of teaching conditions on students' learning of QE, issues and framings emerging when students learn QE, and proposed implications from research on teaching QE. Teaching conditions investigated did not produce stable findings for the influences on learning QE, only cautious indications. Issues found could be associated with different aspects of forms and solution methods of QE, and implications for practice came more from studies on learning than on teaching.

By triangulating implications for practice from these three focuses, implications were found that learning QE involves developing flexible knowledge (Star & Rittle-Johnson, 2008). To develop such knowledge, a student must learn the four main methods for solving QE: applying square root properties, completing the square, factoring, and using the quadratic formula. Each of these procedures of solving QE comes with requirements of conceptual understandings needed to be developed, such as the square root of a square, and the zero-product property. Further, important pre-requisite understandings for students include knowing what constitutes equations, expressions, variables, and having basic algebraic transformational skills such as knowing how to collect and distribute terms. Having flexible knowledge about matters of equivalence, and using the distributive law and perfect square trinomials for both expanding and factoring were shown to be important prerequisites, as these were issues emerging with solving QE that originated earlier. In general, teaching of QE should be with a conceptual focus, and should elicit important aspects of learning targeting the important understandings and reiterating pre-requisite understandings.

Further, the study acknowledges that the relevance of the findings differs across contexts, as different curriculum traditions include different aspects of teaching QE, for example, different emphases on solving QE by factoring. Therefore, when applying findings to inform practice, such contextual properties need to be taken into account.

7.3 Paper 3

Title: Designing a topic-centred teacher guide: A case study of quadratic equations

Paper 3 is a study that describes the design process of a topic-centered teacher guide, and the reasons behind design choices. The teacher guide designed was a topic-centered teacher guide for QE for Swedish upper-secondary school teaching. Choices underlying the design were a mix of integrating educative features (e.g., Davis & Krajcik, 2005) and contextual features, derived from findings on the Swedish context (from Paper 1). The design was carried out by the author, with 15 years of teaching experience from the Swedish context, with informal feedback from colleagues.

The findings provide insights into the design process. Aligning with contextual factors that teaching should be based on research and proven experience, the design began with reviewing existing research literature for relevant findings. Such findings gave some insights into implications for teaching, rendering the need to design lesson activities. These were designed while applying contextual constraints, to align with textbooks and the curriculum. To further guide the instructional design, an appropriate theoretical or didactical model was chosen, which became variation theory (Lo, 2012), as this was found suitable for handling issues found in research. Educative features suggested adding more types of content features, adding extra tasks, building on findings from research, while still aligning with contextual constraints of what was included in the curriculum, practical needs and time constraints.

In Paper 3, it is concluded that the available findings and interpretations from research shaped the way contextual and potentially educative principles interacted in a two-way iterative process. It is acknowledged that the process was shaped by beginning with a research synthesis. Designing a teacher guide with a structured set of educative and contextual features to guide design decisions needs to acknowledge that tensions can emerge in aligning educative principles with contextual principles, while utilizing available research and teachers' experiences as resources in the design process.

7.4 Paper 4

Title: Upper-secondary school mathematics teachers' use of a topic-centered research-based teacher guide

Paper 4 is a study that focuses on the first cycle of the implementation of the teacher guide. Interviews with 6 teachers from four different schools, together with their initial survey responses, were used as data. Using qualitative content analysis, a map of their use was thematically constructed. Teachers' interactions with the expository texts showed that the expository texts of the teacher guide were valued as important because they built on research and included teacher narratives. Curriculum information was not considered important, as it was already known. Teachers reported that their planning time was too limited for them to read everything. The overall research-framing was shown to have an impact on teachers by making them trust the guide and perceive it as high-quality.

The expository texts seem to have two effects on teachers: to remind them and to help them focus on important issues while planning, and to confirm their feelings of professionality by resonating with their own teaching experience. The addressed issues in the expository texts made teachers design instruction to meet these issues in various ways. Activities were to a larger extent voiced to be used if they targeted issues of the expository texts. Further reasons were that these were student-active, inclusive, and with a conceptual focus. Activities were used due to clearly presented rationale and adapted to meet teachers' teaching preferences, or contextual factors such as not enough lesson time or student properties. Reasons for not using activities at all were lack of both planning time and lesson time, or that it was judged to be too hard for students. Tasks were used to enable practice for students, but mostly adapted, by being integrated into their own material, or by reducing or adding tasks. The tasks on common mistakes were used as they addressed issues raised in the expository texts. Traces of improvising, in terms of creating new instruction, were reported as affecting their lecture-style teacher-led "genomgång", sometimes utilizing tasks.

In all, Paper 4 showed ways teachers used the teacher guide, together with some rationale for the use in terms of offloading and adaptations. The findings indicated a connection between issues presented and teachers' mobilization patterns, driven by the research-framing and its resonance with teachers' experience.

7.5 Paper 5

Title: Patterns of interaction and perceptions of support when teachers use a topic-centered research-based teacher guide

Paper 5 investigates the patterns of interaction with the teacher guide in the second cycle, focusing on use and perceived support from the interaction, with respect to contextual properties. The data consist of surveys from 55 teachers from 49 different schools with diverse teaching experience and organizational contexts, with typical resource use.

Teachers reported reading the research summary the most, followed by implications for teaching, and least the curriculum information, in general also reflecting teachers' evaluation of texts. The texts, including the mathematics written in them, were perceived as easy to understand and appropriate, and sometimes as confirming teachers' own experience. Despite recognizing much as familiar, teachers reported finding new insights. Texts were found to support teachers' focus, reflection, and attention to issues. Teachers perceived the texts to allow them to feel free to decide for themselves how to teach.

Teachers engaged with activities more than tasks, reporting having used more activities if lesson time permitted. Activities were used and valued for reasons that they addressed student difficulties, enabled discussion and student exploration, and because they were perceived as well-designed or could fit existing planning. Activity text rationales were perceived as easy to understand, supporting classroom enactment, and supporting modification. Tasks were used selectively and in different ways, for example, old national test tasks for all students or for demonstration, or challenging tasks for individuals. Teachers reported that the research framing increased their motivation to use the guide.

Teachers reported more benefits than challenges in using the teacher guide. Benefits included that it provided new thoughts on teaching, that it confirmed their own teaching experience, that it helped them remember, reflect, notice, or focus in planning, that it increased joy of teaching, and that it improved planning and teaching quality. Challenges were associated with limited lesson time, misalignment with teaching preferences, missing content, or adapting to student groups, with mixed experiences regarding whether the guide saved or required time.

The perceived support for professional learning in developing MKT (Ball et al., 2008) was reported as strongest for PCK, especially for KCS and KCT, while SMK was supported less. Support for planning and teaching, and developing PCK, was associated with texts and activities, and with number of tasks used. Teacher experience was associated negatively with perceived supports, more strongly for times taught QE than for years taught mathematics, but not with usage patterns. Patterns of offloading or adapting were not associated with perceived support. Perceived time for planning prior to receiving the guide was not found to correlate with reported time actually used for planning QE. Actual time used correlated with use and perceived supports. In all, Paper 5 provides a large-scale view of teachers' teacher guide interactions, with contextual influences, providing some conditions for support.

8 Findings

In this section, the main findings of this thesis are presented in relation to the research questions.

8.1 The support from the teacher guide (RQ1)

The first research question:

> RQ1: What support for planning and teaching, and for professional learning, can topic-centered research-based teacher guides provide teachers, and under what conditions?

is here answered through *what* support is provided (Findings 1 and 2), *which features* of the teacher guide enable support (Finding 3), and *what conditions* affect support (Finding 4 and 5).

Finding 1: Support for planning and teaching is provided in varying ways across stages

Support from the teacher guide appeared across all Yinger's (1980) stages of planning and teaching (Papers 4 and 5). In the initial problem-finding stage of planning, teachers were supported in being helped to reflect and focus through reading the expository texts. The connection between teachers noticing issues in the expository texts and using corresponding activities was established in Paper 4. In Paper 5, this was shown implicitly through teachers giving reasons for using activities, originating in the expository texts. This could be to prevent misconceptions and mistakes, and to highlight suitability for different solution methods depending on QE. This indicates that the problem-solving stage of instructional design was supported by having readily designed activities as a starting point for planning (Papers 4 and 5). The activities were reported to be adapted or modified before being enacted in the classroom, supported by the textual support (Paper 5). Support in terms of amount of use indicated that in the stage of implementation, teachers reported using the proposed activities and, to a much lesser extent, tasks in teaching.

Support for planning and teaching could also be seen as a perceived increase in quality, as most teachers reported having been supported in planning and teaching by using the teacher guide as a whole. Most teachers also reported that both their planning and teaching were better than if they had not had access to it, that it increased the joy of teaching, and that it supported them to teach in a way they wanted to (Paper 5).

Finding 2: Support for professional learning is provided through new ideas, new instructional practices, and a new tool

Support for professional learning was evident through teachers' statements that they through the interaction with the teacher guide were provided with new or different thoughts on teaching QE (Papers 4 and 5). In terms of MKT (Ball et al., 2008), the support for professional learning was perceived as greater for the domain of PCK, especially in subdomains KCT and KCS, than for the domain of SMK (Paper 5). This was further reflected in teachers' descriptions of using instruction that was new to them (KCT), and in their reports of both being reminded of and learning new aspects of students' thinking in relation to QE (KCS). Less support was perceived for KCC in terms of knowledge of the Swedish curriculum context for QE.

The majority of teachers perceived support for professional learning from using the teacher guide as a whole, in that they through this use developed new thinking and new repertoire (Paper 5). This was indicated already from the first cycle, even though use was in focus rather than support (Paper 4).

In Paper 1, it was found that a teacher guide is not a common resource used. This was reiterated at a larger scale in Paper 5, indicating that the use of a teacher guide in planning and teaching at all was a new practice. Therefore, professional learning was reflected in terms of using a new tool for planning and teaching, taking the form of the teacher guide.

Finding 3: Support is associated differently with content features, their characteristics, and their mode of presentation

Texts and activities (support planning and teaching, and KCS and KCT)

As seen in Finding 1, the support for planning and teaching was strongly associated with the expository texts and the activities. For professional learning, the interviews showed that the support for KCS was clearly associated with the expository texts (Paper 4). The reported perceived support for KCT was mainly associated with the activities, but could also stem from the texts, as these also suggested instruction, for example in terms of explanations (Papers 4 and 5). In Paper 5, a more thorough reading of expository texts, using more activities, and perceiving support from corresponding texts were associated with higher perceived development of PCK, and perceived support for planning and teaching. Further, teachers explicitly reported that the benefits of having the guide were the expository texts, the activities, and the suggestions for instruction.

Within the expository texts, teachers identified the research summary and the implications for teaching based on teacher experience as the most valued elements (Papers 4 and 5). The expository text on QE in the curriculum did not seem to support teachers to the same extent, as they were not equally valued, mentioned, or read. In the first cycle, teachers reported that curriculum information was already known to them (Paper 4), further indicated through teachers' perceptions of developing KCC being lower than for other PCK measures (Paper 5).

Two lesson activities, Activities 1 and 4 in the teacher guide, were designed to build conceptual understanding and elicit important aspects of QE, drawing on variation theory (e.g., Lo, 2012). These were regarded as a novelty to a larger degree than other activities (Paper 4), indicating that they developed KCT to a larger extent. In Paper 5, it was shown at a group level that those activities were used to a large extent, even though the more traditional activity, Activity 2, was also used to the same extent as Activities 1 and 4. The accompanying texts for activities were also perceived as supportive for both enacting and modifying activities (Paper 5).

Tasks (support planning and teaching, for some)

The collections of tasks were used by teachers less than the activities (Papers 4 and 5), because teachers reported already having functioning ways to access such tasks, provided either in the textbook or through old national task repositories (Paper 4). In cases where tasks were used, they were used to meet different needs. As examples, the challenging tasks were given mainly to individual students, whereas the exit tickets were used in whole-class, and supported teachers to some extent in handling the practical context (Paper 5). Even though task use in general was much lower than activities, a more frequent use of tasks was associated with higher perceived support for MKT, as well as with a more frequent use of activities. This indicates that teachers that in general were high users of teacher guide content, also reported being more supported.

How the content was packaged was also found to affect the support. When the tasks with fictional common mistakes from the first cycle were turned into an activity for the second cycle, the use increased (Papers 4 and 5). This indicates that a more elaborate, embedded presentation of the content and how it could be used, rather than providing tasks alone, was more supportive for planning and teaching in terms of increasing the amount of use.

Characteristics of written texts

The teacher guide texts were designed to speak *to* the teacher in the tone of a colleague with prompts to consider, and with reasoning. This tone was reported to be suitable for teachers, and appropriate for conveying ideas, as reading texts was not perceived as a hindrance, and the mathematics included did not present challenges (Papers 4 and 5). In the first cycle, the length of the texts was reported as long, given teachers' time-constraints, and consequently the text that came first was read the most (Paper 4). In the revision for cycle 2, texts were also separated by descriptions of the suggestions for lesson activities. However, from teachers reporting on their reading of the texts in cycle 2, this did not disqualify later texts. Teachers still read most texts, even though the later texts were read slightly less (Paper 5).

The perceived support for teaching and learning, and for professional learning, was strongly related to the perceived support from the texts and the activities (Paper 5), indicating that the texts were an essential component of the support. The directive and partially scripted textual support for enacting the activities, together with the more reflective support from the rationale, seemed to enable this.

Finding 4: Support is related to teachers' experience, preferences, use, and perceptions

Teachers' experience

In Paper 5, perceptions of support for professional learning were found to be greater for teachers with fewer years of teaching experience, and even more so for teachers who had taught the topic of QE fewer times. This association was stronger in terms of perceptions of support for developing PCK than for developing SMK. In contrast, teacher experience in years was not found to relate to perceptions of support for planning and teaching. However, having taught QE more times before showed weak associations with less perceived support for planning and teaching. However, teacher experience in any form was not found to be directly related to amount of use or types of use. Teachers' statements that reading the texts in the teacher guide confirmed what they already knew from their own teaching experience suggest that experience may act as a way to place trust in and give authority to the material (Papers 4 and 5).

Teaching preferences

In Papers 4 and 5, activities were reported to be used if they aligned with teachers' views on what constitutes good teaching, something that could be either new or something they already had incorporated. Challenges were reported if such alignment was lacking (Paper 5). In both cycles, teachers expressed looking for new inputs into teaching as something that mattered to them (Papers 4 and 5).

As previously described in Finding 2, activities 1 and 4 were considered novel. Further, they were reported to be used because their properties aligned with teachers' preferences, such as eliciting important mathematics, activating students, discussing, and that enacting the activities in class constituted varied teaching. Activity 3 was not used to the same extent as the other activities. Indications were given in the first cycle that this could be due to the mathematical content treated not aligning with teachers' ideas on when it naturally should be introduced in the curricular sequence (Paper 4).

Teachers' use and perceptions of the guide

The number of activities used, and texts more thoroughly read, were in general associated positively with the perceived support for planning and teaching, and for developing PCK. Types of use in terms of offloading or adapting were not found to be associated with perceived support (Paper 5). In addition to teachers' teaching preferences, affordances found in the materials, with teachers perceiving the activities as well-planned, were reasons for using them.

The research framing was seen as largely impacting trust and use, and consequently also the support. Teachers reported having interacted with the teacher guide more due to the research framing of the guide being based on research, including a research summary, and being provided from a university (Papers 4 and 5). Teachers' interest in consuming educational research was however only weakly associated with reporting using the teacher guide more than they otherwise would have. Still, both those factors related to perceived support from the expository texts, as well as from the rationale of the activities (Paper 5).

Further, teachers were found to give authority to a resource if it could do some work for them (Paper 1). Official documents and student textbooks were used for selecting and sequencing mathematical content and its representations. The teacher guide was designed to align with common sequencing in textbooks and official documents, but this alignment was not explicitly raised by teachers in cycles 1 or 2 (Papers 4 and 5).

Finding 5: Support is related to the context: resource use, time, and students

Teachers' existing resource use did not seem to be constraining for teachers wanting to interact with the teacher guide. As was shown, upper-secondary school mathematics teachers' resource-using practice in general does not include using externally produced teacher-intended materials (Papers 1, 4 and 5). Material resources shown to be used in such a context were the student textbook, self-generated lesson notes, web pages, and digital tools for enactment. Much planning time was spent defining and negotiating what was important to include in teaching, with an apparent lack of external material resources supporting instructional design beyond mathematical content and functionality (Paper 1). When teachers with similar resource uses were provided with the teacher guide, they did interact with it, and to a relatively large extent used the teacher guide in instructional design (Papers 4 and 5). Further statements on time included that the guide would be used in future teaching, and also indicated that it was being integrated into teachers' resource system (Papers 4 and 5).

Teachers' time, in terms of planning time and lesson time, was reported in several ways to have an impact on teachers' practice, but somewhat inconclusive and partially conflicting. Challenges in using the guide included not having enough time (Papers 4 and 5). Activities were used, or not used, if they fitted into existing planning, and if there was free lesson time. The activities that were ready-made were reported to have saved some planning time in designing instruction, but time was also needed to read into the rationale of the activity (Papers 4 and 5). The fact that research was summarized and packaged into the resource was also perceived to have saved time. However, teachers' perceived planning time reported on before receiving the guide did not correlate with either how much time teachers actually used for planning, or with any perceived support (Paper 5). In terms of direction, perceived planning time was shown to have a weak negative association with supports. Instead, the actual time used for planning QE was found to be associated with perceived support for planning and teaching and for developing PCK. Having allocated more lesson time to QE was not found to be associated with perceived support, but to perceived planning time. In all, this indicates that teachers, despite perceptions of constraints, could allocate the time they needed for interacting with the teacher guide, if they perceived affordances in the materials.

Student and group properties were other contextual factors that were reported to affect teachers' use in terms of reasons to use, not use, or modify. However, direct relation to the support was not investigated (Paper 5).

8.2 The design of the teacher guide (RQ2)

The second research question:

> RQ2: What are design principles for topic-centered research-based teacher guides that support teachers in planning and teaching, and in professional learning?

is here answered in terms of design principles for the *product* (Design principles 1 and 2) as well as for the *process* (Design principle 3). This will be related to the designed features conjecturing support for teachers. As guidance for the reader, from Paper 3 and the Methods section, the designed features were:

Content features included

(1) possible student difficulties including (mis)conceptions
(2) suggestions of instructional activities addressing student difficulties
(3) representations of the mathematical content and how it relates to other content
(4) student example works and teaching examples
(5) guidance for reviewing and assessing student work

Characteristics of content features

(6) based on research
(7) embed features within theoretical or didactical models
(8) align with teacher ideas on teaching and teaching practice
(9) based on proven experience
(10) align the content with official documents and common curriculum materials

(11) provide transparency and rationale
(12) speak to teachers as well as through them
(13) act as a helpful colleague
(14) include a variety of types of content to suit different teachers' need
(15) include easily modifiable features to fit teachers' individual context

Three design principles can now be proposed for topic-centered research-based teacher guides, inspired by reporting as proposed by van den Akker (1999). References are made to the designed features as (#).

If you want to design a topic-centered research-based teacher guide that supports subject teachers in mathematics, you should…

Design principle 1: …link rationale ("why") with pre-designed adaptable instructional supports ("how")

This principle is justified by Findings 1-3, showing that support for both planning and teaching, and professional learning, was driven mainly through the expository texts and activities, and the perceived connection between them. The "why" can provide rationale, and enable processes of reflection, reminding, and noticing in planning. Rationale also creates a reason for wanting to use the "how", reaching into instructional enactment, supporting all stages of planning and teaching. Texts can support development of knowledge on the students and their learning of the mathematics, and suggested instruction, if new to teachers, can help extend teaching repertoire.

This principle relates to features to include student difficulties including (mis)conceptions (1) and suggestions of instructional activities that addressed these difficulties (2), some with student example works (4). The embedded didactical models (7) were in this design used to render sorting and grouping lesson activities with the help of variation theory. As this is likely an uncommon type of teaching activity, it is likely to have added to the development of new teaching repertoire. Including support for modifying the activities (15) was found supportive for use.

As for the characteristics of the texts, providing transparency and rationale (11) permeated the design, as did having the tone to speak to teachers as well as through them (12), and acting as a helpful colleague (13). These features seemed to be something that in general was enabling and not differentiating based on the findings. It is challenging to capture to what extent the guide actually did act as a helpful colleague, but one teacher in cycle 2 inductively raised this explicitly as a benefit of the guide, stating "Since we are a small school, one is usually alone in planning the units – the teacher guide was like a colleague".

Design principle 2: …align included supports with teacher and contextual properties

This principle is justified by Findings 4 and 5, showing that an included feature must meet a need to be supportive. In this thesis it was found that not all features were equally supportive and that anticipated contextual constraints may be less constraining than they appear.

Teachers

In this particular context, teachers had in general good SMK, which did not seem to hinder reading and understanding the mathematics involved. Consequently, support for SMK was perceived as less, whereas in other contexts, teacher SMK could be hindering uptake. Subject teachers therefore likely need more support for developing PCK than for developing SMK. The designed feature to include representations of the mathematical content and how it relates to other content (3) was therefore less supportive.

The feature to align with preferences of teachers (8) was also important for use to happen, and use was associated with support. Although aided in construction of instructional activities by drawing on an embedded didactical model (7) in terms of using variation theory, the model by itself was not considered to be an important aspect for teachers' support. However, it could be assumed to be included in some of the teachers' preferences for teaching, as activities that were student-centered, student-active, and involved a possibility for discussions, were used to a large extent. Aligning with official documents and common curriculum materials (10) was not explicated by teachers using the guide, but is still likely to be a requirement of the topic-centered framing.

Context

The research framing, relating to the feature to be based on research (6), and the voluntary use were contextual properties that served as reasons for using the teacher guide. In a cultural context where research is not valued, a research framing might have less importance. In less autonomous contexts, where teachers are more constrained, voluntary use might not lead to actual use. Teachers' perceptions that teacher experience is also important were found to some extent, which aligned with the guide being based on proven experience (9) in parts of the expository texts.

Teachers' existing resource use did in general not include teacher materials such as teacher guides. This was however not found to be hindering or constraining for the integration of the designed teacher guide into practice, but it affected what was used. In instructional design, teachers used tasks to a much lesser extent than activities, partially explained by the fact that existing practice already included functioning collections of tasks. Including a variety of types of content to suit different teachers' needs (14) could therefore be supportive to a certain extent for individuals, and mostly for planning and teaching. As an example, including a form of guidance for reviewing and assessing student work (5) in the form of exit tickets, did not act as supportive for most teachers. As previously described, texts and activities were supportive to a larger extent, plausibly because these were types of resources already available to them.

Time was reported to be an important factor, but was not found conclusively to be constraining for the use. Rather was time found to be allocated to the extent that the teachers found reasonable given the perceived affordances in the teacher guide and its features. The fact that features were designed to be easily modifiable to fit teachers' individual context (15) could have helped handle the practical constraints regarding time.

Design principle 3: …utilize existing research and teacher experience and adapt the design process accordingly

This principle is justified by Paper 3, showing that the design process is not exclusively a linear process, even without re-design between implementation cycles. Rather, what can be designed into the resource depends on the stage of the design, on the resources available to the designer, and on emerging needs through taking context into the design.

As presented in Paper 3, the available findings from research mostly targeted learning of QE. This was, for example, in terms of common student thinking and types of difficulties that could emerge. These affected how the research summary was written, as more descriptive findings on mistakes and (mis)conceptions were found rather than prescriptive on how to teach. This did, however, fulfill design expectations to include information on common student difficulties (1). Any implications for teaching came to a larger extent from authors of studies investigating learning than from those investigating teaching (reflected in Paper 2). In order to be able to design lesson activities (2) for informing teaching, the author's experience became more important. In such work, this could utilize support from didactical models (7), which in this case became the use of variation theory. In this way, this design work by the author worked as a lens for translating descriptive findings into prescriptive teaching. For a topic that would have a more expanded research base on the teaching of the topic, research findings could have better informed instructional design in itself. The author's understanding of the research on QE was iteratively improved during the years of the project, reflecting limitations in small design teams, especially those consisting of one person.

When taking findings from research into the design, not all findings on teaching and learning of QE had bearing on the Swedish context. For example, findings on factoring methods for solving QE were not included in the research summary, due to the non-alignment with the Swedish curriculum context. In the second cycle, it was possible to integrate descriptions of how teachers in the first cycle had modified the activities into the designed activities as further support. This highlights the temporal aspect of design.

8.3 Overview of the findings

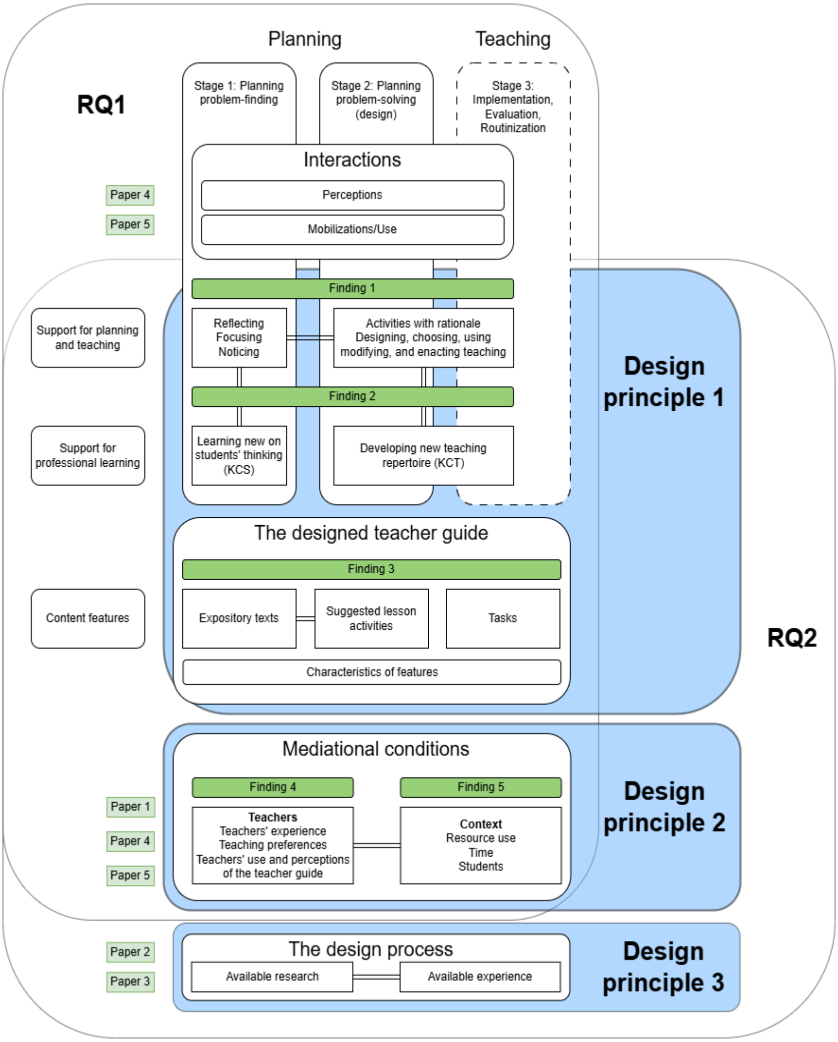
In Figure 4, a schematic overview of the findings and research questions is presented, intended to serve as a guide for the reader to orient the findings in relation to the support, the planning and teaching, and the teacher guide.

The stages of planning overlap the interactions, showing how Finding 1 and Finding 2 correspond to the supports for planning and teaching, and for professional learning. As Papers 4 and 5 investigated these interactions, they are placed as boxes in this vicinity. Keywords of types of support are mentioned in the white rectangles, and the double-lined connections between the boxes indicate that these supports are connected. The designed content features built into texts, activities, and tasks, together with the characteristics of the content, are placed within the designed teacher guide. Finding 3 gave insights into how support was associated with different features. The blue overlap indicates how these findings fed into Design principle 1.

The mediational conditions in terms of influence on support due to factors associated with teachers and their context are represented in rectangles by keywords related to Finding 4 and Finding 5. Papers 1, 4 and 5 were placed in this vicinity as these were the main inputs to these findings, feeding into Design principle 2, represented by a blue overlap.

Finally, the design process includes white connected rectangles representing the utilization of resources in different stages of teacher guide design, which Design principle 3 overlaps in blue. Papers 2 and 3 were placed in this vicinity as they were the papers feeding into the process. The outermost rounded rectangles represent the research questions RQ1 and RQ2, overlapping the elements of the figure to which they belong.

Figure 4. An overview of the findings and the research questions



9 Discussion

In this section, the findings will be discussed in relation to the theoretical framings and to previous research. Further, methodological reflections and limitations are discussed. The section ends with contributions and implications for future research.

9.1 Findings in relation to theoretical framings

The findings are here discussed in relation to the theoretical framings of this thesis: the participatory relationship (Brown, 2009; Remillard, 2005), DAD (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020), MKT (Ball et al., 2008) and through the framing of planning and teaching by Yinger (1980). Each framing illuminates different aspects of the findings and they can therefore be seen as both complementary and partially overlapping. What follows here serves as an attempt to network some of these ideas (Prediger et al., 2008) and also to propose further extensions.

Participation with resources is stage-dependent

The findings highlight that teachers' interactions through perceptions and mobilizations of available resources (Brown, 2009) will vary in the different stages of planning, as described by Yinger (1980). First, in the planning problem-finding stage, adapting and offloading involved distributing agency to the teacher guide's expository texts when defining the initial problem conception. Perceptions and mobilizations were found to be associated with focusing, reminding, and noticing, allowing the text to do part of the work. In the next problem-solving stage, where instruction is designed, adapting and offloading instead become a matter of the extent to which the proposed lesson activities will be used in teaching as they are, or adapted. This also reflects a shift in the purpose of the interaction, from reflecting upon the planning problem to making decisions in the design of instruction. Considering the stage-dependence can therefore provide a more fine-grained understanding of how the distribution of agency may vary across stages. This advances the ideas of Brown (2009) in terms of offloading and adapting, which apply not only to the intended enactment of instruction, but also to the ideas preceding instructional design. This advancement adds a temporal dimension to teachers' participation with a resource in instructional design.

Distribution of agency does not diminish capability to act

The expository texts were found to support teachers by shaping what they attended to when planning to teach QE. This was seen as offloading (Brown, 2009) the formulation of the planning problem to the teacher guide's texts. Taking a DAD perspective (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020), this could be explained in terms of beginning formations of utilization schemes for a document with the teacher guide as a resource. In this early stage, the texts could steer or activate concepts-in-action (Vergnaud, 1998), meaning what a teacher perceives as salient in the situation, and affect the teacher's goals, rules of action, and information seeking. This reflects processes of instrumentation rather than instrumentalization (Gueudet & Trouche, 2009; Rabardel, 1995/2002). Such instrumentation was then found to lead to the teacher using the suggested activities, based on the perceived possibilities of inference.

Being steered might signal a "loss" of agency in terms of capability to act according to free will. However, such processes were rather mentioned by teachers in positive terms, suggesting that they allowed themselves to be steered, or perhaps guided, through such instrumentation processes. They also did not report feeling steered, but instead reported teaching in alignment with their own intentions. This could be explained by the fact that instrumentation was allowed for and enabled through instrumentalization processes, shaped by the theorems-in-action that the teacher guide is believed to be of high quality.

In terms of Brown (2009), distribution of agency by offloading, where more extensive instrumentation than instrumentalization occurs, should be seen as an informed judgment of the teachers. Perceiving the teacher guide as trustworthy enabled distributing more agency onto it at the different stages of planning, freeing up time and effort for other aspects of the work of teaching. In the findings, no association was found between perceived support and adapting or offloading behavior, further strengthening this claim.

Providing teachers with rationale and suggestions for instruction therefore does not necessarily reduce their agency in terms of capability to act; rather, it informs decision-making and supports professional judgment.

Extending the notion of educative within teacher professional learning

The professional learning supported through teachers interacting with the teacher guide was described as both developing MKT (Ball et al., 2008) and learning to use a new tool among a set of resources, seen either through a participatory relationship (Brown, 2009; Remillard, 2005) or through documentational genesis (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020). This highlights two complementary views of teacher learning: as developing individual knowledge for teaching, or as developing a new practice together with the teacher guide.

Built on aims to develop PCK (Shulman, 1986), the principles of educative curriculum materials have rendered lists of features and design principles (e.g., Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017). This thesis further emphasized that not all these features by themselves are equally important for supporting teacher learning. In addition, some operate in combination, suggesting that what is educative should not be reduced to individual features. Instead, educative features should be considered interrelated, with uptake being conditional on teachers and their context, as teachers are both targets and mediators of educative features. These insights were the driving force for formulating the design principles.

Expanding the notion of educative as promoting teacher learning would in DAD (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020) mean enabling ongoing documentational genesis. An educative perspective in terms of developing MKT takes the view of teacher knowledge as situated within the teacher. For DAD, the emphasis is on developing a teaching practice where knowledge is distributed between the teacher and the resource through the constructed documents. In this sense, what is educative emerges in the interaction between the teacher and the resource system, rather than being a property of curriculum materials. Supporting planning and teaching and the development of documents involving the teacher guide are therefore in such a view educative. This extends the original PCK-based conception of educative materials by recognizing that, from a DAD perspective, teacher learning also consists of developing documents and practice. In this view, curriculum materials are educative when they enable ongoing development of use.

Further, through the design, the teacher guide can be said to have embedded knowledge within domains of PCK through the rationales and instructional suggestions. The documents a teacher then creates by drawing on resources in the form of both the teacher's PCK and the teacher guide's embedded PCK will constitute a system whose instructional capacity exceeds what each component brings alone. In such a case, the teacher's professional knowledge is not only supported but also augmented through the interaction.

9.2 Findings in relation to previous research

This thesis extends previous research by showing that, even in contexts where teacher guides are not used, it is possible to design a teacher guide to act as a tool for teachers to inform and support their work of planning and teaching, and professional learning. This aligns with other findings indicating that teacher learning can occur through the use of curriculum materials (Collopy, 2003; Remillard, 2000; Stein & Kaufman, 2010). Despite not traditionally using teacher guides, the teachers demonstrated substantial uptake and perceptions of support, indicating perceived affordances in the teacher guide. Insights from the context of Swedish upper-secondary school reiterated that teaching in general is otherwise still characterized by the student textbook functioning as the main curriculum material (Jablonka & Johansson, 2010). The use of old, self-generated lesson notes was also something found in the teachers' common planning practice, resembling products of documents (Gueudet & Trouche, 2009; Remillard, 2019).

These findings highlight an important contribution of this thesis: Swedish teachers' use of student textbooks to teach does not necessarily mean that this is their preferred way of teaching. Rather, it is likely a consequence of prioritizing the handling of the practical situation, or what Yinger (1980) referred to as the teaching dilemma. This is reasonable, given the scarcity of use of externally produced teacher-intended materials for designing instruction. Such a need could be said to exist, as the teacher guide designed in this thesis did produce substantial uptake among teachers. The reasons why teachers chose to interact with the teacher guide was found to be related to the teachers themselves and to the affordances of the materials.

When teachers were free to choose, the interactions between teachers and the teacher guide showed affordances and constraints through the use and reasons for use. Teachers mobilized the different content in ways they found suitable, given their preferences and perceptions of their context. This aligns with previous research highlighting teachers' orientations as decisive for adaptations to materials (Choppin, 2011; Remillard & Bryans, 2004; Roth McDuffie et al., 2018). Insights into preferences in this context included that the teacher guide content was perceived as well-planned, and aligned with notions of good teaching. Further, it addressed issues that teachers either already believed to be issues, or became aware of through their reading.

Perceiving the teacher guide as having affordances was also associated with the research framing. In resonance with findings that teachers are interested in research (Nordgren et al., 2019), the research-based design to include previous research findings and the university framing was an integral part of the reasons why teachers would use it. This is one form of research consumption in terms of external motivation, as described by Stolpe (2024). However, internal motivations also manifested through teachers' curiosity and their wanting to learn new teaching methods. Altruistic motivations manifested in teachers' desires to improve students' learning, and to prevent them from developing misconceptions. The research framing can therefore be seen as both enabling teachers to want to engage with the guide at all and providing value through teachers' interactions with research findings.

Aligned texts and activities as educative design

The connection between issues addressed in expository texts and the activities as ways to attend to these issues was one identified mechanism enabling teachers to use the activities. In terms of Choppin (2011) and Remillard (2012), one can think of the designed expository texts in the teacher guide as *thinking devices* speaking *to* teachers and the corresponding activities including rationale as something being half *delivery mechanisms* and half *thinking devices* speaking both *to* and *through* teachers. This is in line with this thesis' design principle, suggesting that supportive teacher guides should contain both modes of communication, and that these should clearly align. For these Swedish teachers, the support provided by activities aligns with earlier findings that scripted lessons can be educative (Remillard & Reinke, 2012; van Steenbrugge & Ryve, 2018). This corresponds to developing new teaching repertoire within the subdomain of KCT (Ball et al., 2008).

Guidelines for educative features in curriculum materials previously proposed (Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005; Davis et al., 2014, 2017) align in part with this thesis' finding that expository texts including information on student thinking, and activities that proposed suggested instruction were found to support teachers. In contrast, other previously proposed principles of providing a wide range of features, and multiple vectors, to suit more teachers were not found to be equally educative, as a provided designed feature intended to support teachers was in this thesis also found to have to fill a need to be supportive. For example, the tasks were used less often, as these were indicated to be already part of teachers' resource systems (Gueudet & Trouche, 2009), meaning less novelty and consequently perceived as offering fewer affordances. One could of course argue that this could have been supportive for the few teachers using the tasks, but in general these would not have an educative impact in the same way as the expository texts and activities. This highlights the design principle that topic-centered research-based teacher guides should account for teachers and their context in order to produce designs that are more likely to support (more) teachers efficiently. This resonates with a stance that affordances depend on actors' experience, knowledge or context, arising from perceptions of what the resource can enable (McGrenere & Ho, 2000). There is therefore a need to also differentiate between the educative impact of different features in different contexts.

Many teachers reported having performed new types of teaching through using the guide. It could be surprising that many of the used activities, which were in line with more reform pedagogies, were chosen to be used at all, given the current practice. Besides the impact of the connection to the expository texts' rationale, one possible explanation for this could lie in the influence of the national PD program "Boost for Mathematics" (Lindvall et al., 2021; Österholm et al., 2024). As the PD program likely raised awareness of such practices, the teacher guide may have served as a tool for teachers that enabled them to enact such practices. This would be in line with ideas of having both materials and expert guidance for successful PD (Borko, 2004; Cobb & Jackson, 2012; Desimone, 2009). Extending this argument, the findings of this thesis suggest that a teacher guide designed as in this thesis has the potential to support both aspects of PD; the expository texts provide expert guidance, and the activities provide the materials to enact teaching accordingly, and this is what makes it educative.

The educative impact on upper-secondary subject teachers

In this thesis, the educative impact on teachers from interacting with the teacher guide varied across teachers. Teachers with more experience perceived support to a lesser extent than less experienced teachers. This association was stronger for the number of times they had taught QE before than for number of years taught. One explanation for this could be that a teacher that has taught the topic of QE before has already developed more topic-specific PCK for QE, therefore making a topic-centered guide provide less novelty. However, no relation was found between teacher experience and the types or amount of interaction with the teacher guide investigated, which is partially in contrast to findings by Ahl et al. (2014). This indicates that factors other than experience alone relate to the use. Still, this thesis' findings suggest that the teacher guide had more educative impact for less experienced teachers, but was still educative to some extent for most teachers.

The findings of this thesis indicate a difference between upper-secondary school subject teachers' interactions with teacher guides and findings from previous research on teachers' use of teacher guides from primary or lower-secondary education in the same Swedish cultural context. Whereas teachers in primary school rarely used the teaching techniques and activities of their curriculum materials (Remillard et al., 2026), the upper-secondary teachers in this study did.

Because teachers in this study were subject teachers, and can therefore be assumed to possess comparatively strong SMK, this had implications for the perceived support. In contrast to findings from primary and lower secondary school contexts (e.g., Hill et al., 2008a), the teachers studied in this thesis did not report any SMK-related difficulties in reading the guide. Nor did they in general perceive themselves as developing SMK through the use. This is in contrast with suggestions of educative support for SMK that have been proposed in much of the literature on educative features (e.g., Davis et al., 2014, 2017; Quebec Fuentes & Ma, 2018). The findings of this thesis therefore indicate that for subject teachers, educative features are more effective when they target development of PCK rather than SMK.

The strong indications that teachers perceived greater development in PCK than in SMK also align with findings on SMK being a pre-requisite for developing PCK (Baumert et al., 2010). This could indicate subject teachers had an advantage in comprehending the more ambitious ideas presented in the teacher guide, something that in other studies has been shown to be challenging for teachers with lacking mathematical knowledge (e.g., Hill et al., 2008a). Still, the teacher guide's implicit topic-centeredness and alignment with official curriculum reiterated that strong content focus and situatedness aligning with actual practice are important for professional learning (Borko, 2004; Desimone, 2009).

The research-based design

This thesis has contributed to the field of knowledge-brokering (e.g., Rycroft-Smith, 2022) by designing and having teachers use a resource based on, or informed by, findings from research. The use by teachers provides insights into one way research could be implemented (e.g., Century & Cassata, 2016) in teaching practice, through informing the practice (Biesta, 2007). It is acknowledged that the teacher guide designed for this particular design research project is in many ways not a commonly seen kind of resource. It combines longer texts in the style of PD texts or teacher education literature, with more common elements of teacher guides. This combination of a topic-centered curriculum-aligned research summary, together with curriculum material elements, packaged as a teacher guide, seems promising in the light of this thesis' findings.

It has been important to preserve teacher agency, and this study has shown through its non-mandatory framing that teachers *will* use a teacher guide voluntarily, but that there still are tensions in authority in relation to teachers' free will in relation to the research framing. Related, this thesis has provided little answer to mechanisms behind the increased use due to the research framing. Indications through statements imply that this is due to teachers' own preferences for teaching in a research-informed way, for inner or altruistic motivation (Stolpe, 2024). It could, however, also be a consequence of the institutionalized setting they are in, with the school law as an outer authority demanding teaching to have its foundation in science and proven experience (SFS 2010:800, 1 kap. 5 §), reflecting external motivation.

In line with findings from Rycroft-Smith & Stylianides (2022), during the design process of writing up the expository texts, there have been tensions in the priorities between the author as a designer and former teacher, and now a researcher, designing for teachers. Fewer tensions were observed from teachers in terms of accepting the new type of resource, in contrast to tensions observed in other contexts (e.g., Dietiker & Riling, 2018). For example, the activities seemed to align with teaching preferences for many teachers in terms of who does the work in classrooms, and the nature of mathematical content taught. This is in contrast to the difficulties experienced by other teachers using curriculum materials originating from another context (Hemmi et al., 2019). That there were fewer apparent emerging tensions in this study might be biased by the sample of teachers taking part being, in general, more reform-oriented.

As a final note, it is acknowledged that the research-based expository text offered to the teachers was not the definitive research summary, but a first substantive attempt that seems to have, at least in part, achieved its intended function.

9.3 Methodological reflections

The work performed to bring together this design research project has involved several approaches, including the design process itself, and the investigation of teacher interaction.

In this thesis, a design research approach was taken to design an external teacher guide instead of investigating the use of such an existing resource. This was mainly because a teacher guide of the form that this thesis aimed to examine was not found to exist in practice. This stance was strengthened after the study resulting in Paper 1. To design a guide based on conjectures taken from principles and features in other contexts made it possible to investigate outcomes related to different features. This enabled insights into which features were taken up, as well as possibilities and constraints in the design process when including features and giving these specific characteristics.

The primary perspective of teachers' planning using a teacher guide largely guided the methods used for generating data. The ideas of Brown (2009) that planning in terms of designing instruction is a matter of perceiving and mobilizing existing resources were the main perspective throughout the thesis project. This had the consequence that as perceiving affordances and constraints is subjective, it was best investigated through focusing on the teachers.

The choice of methods for data generation

Pragmatically, using interviews for the smaller scale and surveys for the larger scale was considered a reasonable and feasible option. Conducting observational studies would have been more difficult at scale, and would also pose challenges in capturing the enactment of the planning process. Observation of the planning process was considered in the design of the study. However, the choice was made not to interfere, as this could have affected the ecological validity of the study. For example, if teachers had been instructed to take notes in the guide for the researcher, their planning practice could no longer be assumed to be common planning practice. As the thesis' aim was to be able to make claims about what a resource like the teacher guide could do on its own, not intruding on the teacher practice was an important part of the research design.

Trustworthiness

Through interviews and surveys, teachers provided insights into their practice by reporting their use, reasons for use, and modifications. Reporting, rather than observing, cannot always be assumed to represent reality objectively. For example, there is an inherent risk that teachers may portray themselves as more competent or more engaged than they truly are. In anticipation of this, in the framing of the study, and in the interviews, teachers were initially reassured that no use was expected, and that there was a genuine interest in getting insights into how they perceived and used different features in the guide. Teachers reported on their use of the teacher guide, mostly in terms of whether they did or did not use it. The questions were very specific and targeted specific features. The risk of teachers substantially overreporting their use is therefore assumed to be low. Especially given that there were many aspects of the guide to discuss, which made it easier for teachers to identify nuances and contrasts between its features.

Findings from both cycles (Papers 4 and 5) indicated to a large extent similar use, as well as similar perceptions of the guide and its features in data from interviews or surveys. This was one form of triangulation, increasing the likelihood that uses and perceptions found would be accurately represented.

Differences in data generation on emerging findings

It is still acknowledged that the different ways of generating data are likely to have rendered different findings. The interview data showed partly different things from free-text answers in the surveys. It is likely that reasons for use written by teachers in the survey free-text answers were probably something perceived as salient for teachers, but not a full disclosure of all reasons. This could, for example, be seen in that no teacher in the survey stated, in open-text answers, to have used activities from the guide because of the research framing. However, this was a reason stated in the interviews through conversations by many of the interviewed teachers in the first cycle.

There was a trade-off between the questions that could be included, given the time teachers were expected to spend on the survey, and the information needed to support the research. This had implications for the findings that could be generated. For example, as the tasks in the first cycle generated less interest from teachers compared to the texts and activities, the focus on the tasks in the survey became less, as these were anticipated to be less used. This, in turn, was confirmed as tasks were reported to be used less frequently in the second cycle as well.

Did any professional learning take place?

In this thesis, professional learning has been conceptualized in two ways: as developing MKT (Ball et al., 2008) from a more cognitive perspective, and as developing practice through documentational genesis in DAD (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020).

For professional learning, seen as developing MKT, a high self-reported perceived development is not necessarily the same as actual development of MKT (Copur-Gencturk & Thacker, 2021). Reporting an ordinal number in a survey should therefore not be interpreted as an absolute measure of how much is developed. However, when categorical subdomains are compared to each other (KCS, KCT, CCK, etc.), they are likely to reflect relative perceived development, due to the situatedness and explicitness of survey questions in relation to their specific interaction. For the survey, internal validity of constructs in Paper 5, on which associations between variables were descriptively described, was checked with statistical measures (Cronbach's alpha, McDonald's omega). The constructs for the subdomains were based upon items created in relation to the teacher guide's possible affordances. This was theoretically grounded in terms of developing in relation to subdomains of MKT, as described by Ball et al. (2008). There is a possibility of overlap between individual items across different subdomains, and the unequal number of items for each construct may also have skewed the data. Such issues are not believed to have an impact on the main findings. The subdomain of KCC was narrowly investigated in Paper 5 as knowledge of the Swedish curriculum. One might consider that learning to use the teacher guide could be a way to develop KCC, in terms of knowledge of what curriculum resources are available.

The impact of the small-scale study and the single-person design team

There are several aspects of the design that did not allow for investigating variation in different designs. For example, the effect on the study of having QE as a topical focus is likely to have affected the design, compared to other adjacent mathematical topics, like quadratic functions, or systems of linear equations. The impact of the specific topic cannot be properly assessed without a comparison. However, it was only feasible to conduct an investigation of one teacher guide within the scope of this thesis.

Regarding the design, the impact of one person carrying out most of the design production introduces limits to the design. Despite this limitation, the relative success evident in teachers' use also shows on a positive note that much can be done with limited personnel. If the review of the research on teaching and learning of QE had been more developed at the times of design, it would have been easier to design the content and analyze teachers' statements more systematically.

Generalization and transfer

Important for transferability or generalizability is the sample of teachers that received the guide. The 6 teachers in the first cycle, and the 55 teachers in the second cycle, together came from 53 different schools geographically spread within Sweden, and with a wide variety of teacher experiences, from novices to experienced teachers. In general, they perceived their planning time as sufficient, and were possibly more interested in research and reform-pedagogies than the average teacher, making the sample somewhat biased.

Further, that 55 teachers, out of 93 teachers eligible for post-use survey, used the guide to some extent, making up 70% of the 68 teachers answering the post-survey, or 60% of the eligible teachers, shows that it is likely that a large share of teachers would benefit from the support this kind of resource can provide.

It should also be acknowledged that the 100 teachers that signed up to receive the teacher guide were a result of 462 principals contacted by mail. Entertaining oneself through a Fermi-inspired[6] calculation, one can conclude that schools in Sweden differ in size, but most schools have 2 or 3 parallel student groups for the science track and technology track. Bigger schools have many parallel groups, up to 6 or 7 groups. Some small schools have only one student group, sometimes mixed between tracks. Assuming these 462 principals on average had 2 teachers teaching the course Mathematics 2c (as some teachers also teach parallels), then the 100 teachers signing up constituted $100/(462 \cdot 2) \approx 11\%$ of all the Swedish teachers teaching the course. Consequently, the 55 teachers who did use the guide would have been approximately half of that, or 5% of all the Swedish upper-secondary mathematics teachers teaching the course in the spring semester of 2025. In terms of magnitudes, it is likely to at least be in one-digit percentages, as the average number of teachers per principal is likely the factor that contains the most uncertainty.

9.4 Limitations

As previously mentioned, this thesis work has not investigated any actual classroom work, nor has it measured teachers' actual development of knowledge or skills. All data from teachers' interactions with the teacher guide is based on teachers' self-reporting of practice.

Further, the operationalization of support for planning and teaching as one unit, however with focus on the planning situation, has its limitations. It is the out-of-classroom situations that teachers have been asked about and reported on. However, in line with the conceptualization of planning by Yinger (1980), teachers do not always keep a clear line between planning for teaching, enacting teaching, and reflecting on planning and teaching, feeding back to the next cycle. For a teacher, something that occurred in a lesson may be perceived as equally real as something intended to happen in an upcoming lesson. The framework of DAD (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020) that was used as an posteriori lens has the strength in the systemic holistic approach in which documentational work happens both in and out of the

[6] A Fermi calculation, refers to finding an approximate solution based on limited data by making assumptions, see for example https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_problem

classroom with a set of resources. However, methodologically DAD requires more work, as the stability of teachers' work can only come from longitudinal examination of teacher practice rather than from the snapshots provided through this thesis.

There were indications that the teacher guide also provided support in terms of affective domains of teaching, corresponding to professional identity, but this was not further focused.

9.5 Contributions and implications for practice

Through this work, theoretical, methodological, empirical, and practical contributions have been made.

Theoretical contributions

In this thesis, several theoretical framings and conceptualizations centering teachers' work with resources have been employed in an attempt to network theories (Prediger et al., 2008) and highlight benefits, range, and limitations. Further, as described in the theoretical discussion, extensions to thinking about agency and professional learning in relation to supportive or educative teacher guide materials have been proposed.

Although not focused in the theoretical discussion in this thesis, Paper 2 has provided a synthesis for the teaching and learning of QE. This can hopefully provide insights for future research and aid curriculum development and teacher PD for both in-service and pre-service teachers.

Methodological contribution

This thesis has attempted to investigate teacher guide material use through design and evaluation of teachers' uses of specific features of the design. A gap in research on teachers' use of educative materials and teacher guides have previously been identified (Trouche et al., 2023; Rezat, 2024) and this thesis has contributed to attending to this gap. Even though there were methodological challenges to this approach, as seen in Paper 5, there are benefits in attempting to quantify findings in a field that otherwise largely consists of qualitative approaches with fewer teachers than 55. Triangulating qualitative analysis with descriptive quantitative analysis, covering two cycles in Papers

4 and 5, has been a fruitful way of addressing this goal and a contribution of this thesis.

Paper 2 used a configurative systematic review approach to consolidate evidence for informing the teaching of a mathematical topic, which is rarely done, and Paper 3 has, together with the thesis as a whole, provided explicit insights on the design process.

Empirical contribution

This thesis has contributed to empirical findings from upper-secondary school subject teachers, a population that has rarely been researched before in this context, as most research on teachers' use of curriculum materials has been conducted on teachers of younger ages (Remillard, 2005), or teachers have been grouped together as a whole. It has also given insights into how teachers interact with educative features in a context where teachers have high autonomy.

In this thesis, the contribution to the field of mathematics education research has been to create more knowledge about how teachers can be supported in teaching through being informed, and the role played by research in such informing. This has also created more knowledge about teachers' use of resources in planning and teaching, specifically regarding different features of a resource and their use.

Practical contributions

One major practical contribution of this thesis work is the proof of existence that it is indeed possible to support subject teachers in upper-secondary school who usually do not use teacher guides, with a well-designed teacher guide.

Further, the teacher guide designed and tried out is made available to teachers and teacher educators (Appendix A). The description of both the process and the product in terms of the guide can serve as templates for curriculum designers when designing supportive teacher guides for subject teachers. Moreover, the proposed design principles can further inform and strengthen such work.

9.6 Suggestions for future research

Given the exploratory nature of this work, it opens up more questions than it has answered. Even though this thesis has shown that teacher guides designed in the way described can affect teacher practice in a likely productive way, the classroom implications are unknown. This creates a need for studies investigating how using the teacher guide manifests in classrooms, and how the presentation of the teacher guide affects teachers' use and support. Further, as this guide was designed for the topic of QE, there were implications for how the guide was designed and how instructional suggestions were taken up. Comparative work that repeats the design process for another topic area, such as quadratic functions, systems of linear equations, trigonometric equations or functions, would likely provide valuable insights. These insights would concern which aspects of the design process would remain consistent and which differ depending on the mathematical content and its associated teaching and learning issues. Expanding to further content areas spanning a course could open up possibilities to investigate longitudinal effects of teachers' planning and teaching practice, as well as their PD. This includes collaborative work of planning and teaching with the teacher guide.

Delving deeper into the mechanisms underlying the role of research, and the extent to which teachers' emphasis on the research framing is a consequence of the Swedish Education Act (SFS 2010:800, 1 kap. 5 §), or embedded in other notions, could provide valuable insights. Also, what constitutes a sufficiently robust research summary that meets the needs of teachers while respecting researchers' concerns about the validity of evidential claims is an issue that warrants investigation.

Teachers' engagement with the texts in the teacher guide was reported in this study, but their use could be examined in greater depth through a closer and more detailed analysis. For example, what teachers look at, interpret and notice while reading the texts (e.g., Amador et al., 2017; Remillard, 2012). This could be done with methods not chosen in this thesis, such as commented documents.

As Paper 5 started investigating interactional patterns between teachers and specific features of the teacher guide, there are many generated hypotheses to investigate further, for instance, which teacher factors beyond experience that might account for different patterns of use and support.

To investigate teacher learning, future research should target educative teacher materials, particularly in relation to development of resource use through documentational genesis (Gueudet & Trouche, 2009; Trouche et al., 2020). Another line of inquiry would be to examine teacher guide support in terms of affective domains of teaching, especially as they correspond to teachers' professional identities.

10 References

Ahl, L., Koljonen, T., & Hoelgaard, L. (2014). How are mathematics teacher guides used for support and inspiration in teaching? In H. Silfverberg, T. Kärki, & M. S. Hannula (Eds.), *Proceedings of Nordic research in mathematics education* (pp. 153–163). The Finnish Research Association for Subject Didactics.

Ahl, L., Gunnarsdóttir, G. H., Koljonen, T., & Pálsdóttir, G. (2015). How teachers interact and use teacher guides in mathematics – Cases from Sweden and Iceland. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3–4), 179–197. https://doi.org/10.7146/nomad.v20i3-4.148697

Amador, J. M., Males, L. M., Earnest, D., & Dietiker, L. (2017). Curricular noticing: Theory on and practice of teachers' curricular use. In E. Schack, M. Fisher, & J. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 427–443). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_25

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6–8, 14. https://doi.org/10.3102/0013189X025009006

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133–180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Biesta, G. (2007). Why "what works" won't work: Evidence-based practice and the democratic deficit in educational research. *Educational Theory, 57*(1), 1–22. https://doi.org/10.1111/j.1741-5446.2006.00241.x

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*(1), 72–87. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher, 33*(8), 3–15. https://doi.org/10.3102/0013189X033008003

Brown, M. W. (2009). The teacher–tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work* (pp. 17–36). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203884645

Buch, B., Gissel, S. T., Oksbjerg, M., Kjeldsen, K., & Albrechtsen, T. R. S. (2023). A systematic review of research on teachers' guides. *Learning Tech*, *7*(12), 12–40. https://doi.org/10.7146/lt.v7i12.132330

Century, J., & Cassata, A. (2016). Implementation research: Finding common ground on what, how, why, where, and who. *Review of Research in Education, 40*(1), 169–215. https://doi.org/10.3102/0091732X16665332

Cevikbas, M., Koenig, J., & Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 101–113. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2

Charalambous, C. Y., Hill, H. C., & Mitchell, R. N. (2012). Two negatives don't always make a positive: Exploring how limitations in teacher knowledge and the curriculum contribute to instructional quality. *Journal of Curriculum Studies, 44*(4), 489–513. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.716974

Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 331–353. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9170-3

Choppin, J., Roth McDuffie, A., Drake, C., & Davis, J. (2022). The role of instructional materials in the relationship between the official curriculum and the enacted curriculum. *Mathematical Thinking and Learning,* *24*(2), 123–148. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1855376

Christiansen, I. M., & Erixon, E. L. (2024). Opportunities to learn mathematics pedagogy and learning to teach mathematics in Swedish mathematics teacher education: A survey of student experiences. *European Journal of Teacher Education, 47*(1), 159–177. https://doi.org/10.1080/02619768.2021.2019216

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education, 18*(8), 947–967. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cobb, P. & Jackson, K. (2012). Analyzing educational policies: a learning design perspective. *Journal of the Learning Sciences, 21*(4), 487–521 https://doi.org/10.1080/10508406.2011.630849

Collopy, R. (2003). Curriculum materials as a professional development tool: How a mathematics textbook affected two teachers' learning. *The Elementary School Journal, 103*(3), 287–311. https://doi.org/10.1086/499727

Copur-Gencturk, Y., & Thacker, I. (2021). A comparison of perceived and observed learning from professional development: Relationships among self-reports, direct assessments, and teacher characteristics. *Journal of Teacher Education*, *72*(2), 138–151. https://doi.org/10.1177/0022487119899101

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, *34*(3), 3–14. https://doi.org/10.3102/0013189x034003003

Davis, E., Palincsar, A. S., Arias, A. M., Bismack, A. S., Marulis, L., & Iwashyna, S. (2014). Designing educative curriculum materials: A theoretically and empirically driven process. *Harvard Educational Review*, *84*(1), 24–52. https://doi.org/10.17763/haer.84.1.g48488u230616264

Davis, E. A., Palincsar, A. S., Smith, P. S., Arias, A. M., & Kademian, S. M. (2017). Educative curriculum materials: Uptake, impact, and implications for research and design. *Educational Researcher*, *46*(6), 293–304. https://doi.org/10.3102/0013189x17727502

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38*(3), 181–199. https://doi.org/10.3102/0013189X08331140

Dietiker, L., & Riling, M. (2018). Design (in)tensions in mathematics curriculum. *International Journal of Educational Research, 92*, 43–52. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.001

Drake, C., Land, T. J., & Tyminski, A. M. (2014). Using educative curriculum materials to support the development of prospective teachers' knowledge. *Educational Researcher, 43*(3), 154–162. https://doi.org/10.3102/0013189X14528039

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – Mathematics Education, 45*, 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Gibbons, L., McKie, K., & Hiebert, J. (2025). Using educative curriculum materials to support analysing mathematics teaching in deep and specific ways. In B. Pepin, I. Kohanová, & M. B. Langfeldt (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT5)* (pp. 197–204). Norwegian University of Science and Technology. https://hal.science/hal-05460768v1

Gough, D., Oliver, S., & Thomas, J. (2017). *An introduction to systematic reviews* (2nd ed.). SAGE.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199–218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

Gunnarsdóttir, G. H., & Pálsdóttir, G. (2014). How do teachers use teacher guides in mathematics? In H. Silfverberg, T. Kärki, & M. S. Hannula (Eds.), *Proceedings of Nordic research in mathematics education* (pp. 195–204). The Finnish Research Association for Subject Didactics.

Hargreaves, D. H. (1996). *Teaching as a research-based profession: Possibilities and prospects*. Teacher Training Agency Annual Lecture, Teacher Training Agency.

Heck, D. J., Plumley, C. L., Stylianou, D. A., Smith, A. A., & Moffett, G. T. (2019). Scaling up innovative learning in mathematics: Exploring the effect of different professional development approaches on teacher knowledge, beliefs, and instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 102*(3), 319–342. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09895-6

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024). *Läromedel på villovägar?* (Report). Svenskt Näringsliv. https://www.svensktnaringsliv.se/sakomraden/ekonomisk-analys/hkadod_reviderad-rapport-laromedel-pa-villovagar-webb91pdf_1213822.html/Reviderad+Rapport+La%25CC%2588romedel+pa%25CC%258A+villova%25CC%2588gar+webb%255B91%255D.pdf

Hemmi, K., Krzywacki, H., & Koljonen, T. (2018). Investigating Finnish teacher guides as a resource for mathematics teaching. *Scandinavian Journal of Educational Research, 62*(6), 911–928. https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1307278

Hemmi, K., Krzywacki, H., & Liljekvist, Y. (2019). Challenging traditional classroom practices: Swedish teachers' interplay with Finnish curriculum materials. *Journal of Curriculum Studies, 51*(3), 342–361. https://doi.org/10.1080/00220272.2018.1479449

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008a). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008b). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Jablonka, E., & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, B. D. Söndergaard, & L. Haapasalo (Eds.), *The first source-book on Nordic research in mathematics education* (pp. 363–372). Information Age Publishing.

Johnsson Harrie, A. (2009). *Staten och läromedlen: En studie av den svenska statliga förhandsgranskningen av läromedel 1938–1991* [The state and the curriculum materials: A study of the Swedish state review of curriculum materials 1938–1991]. (Doctoral dissertation, Linköpings universitet). DiVA. https://diva-portal.org/smash/get/diva2:217963/FULLTEXT02.pdf

Jukić Matić, L., & Glasnović Gracin, D. (2021). How do teacher guides give support to mathematics teachers? Analysis of a teacher guide and exploration of its use in teachers' practices. *Research in Mathematics Education, 23*(1), 1–20. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710554

Kiselman, C. O., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan* (1. uppl.). Göteborgs universitet, Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).

Kohanová, I., Slavíčková, M., Rosa, S., Di Paola, B., Michal, J., & Çakıroğlu, E. (2025). Exploring teachers' resource utilization practices and beliefs in mathematics education: A cross-national study on reasoning and proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 23*, 3545–3575. https://doi.org/10.1007/s10763-025-10577-4

Koljonen, T., Ryve, A., & Hemmi, K. (2018). Analysing the nature of potentially constructed mathematics classrooms in Finnish teacher guides – The case of Finland. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 295–311. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1542338

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. In G. Kaiser, & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 181–197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_8

Land, T. J., Tyminski, A. M., & Drake, C. (2015). Examining pre-service elementary mathematics teachers' reading of educative curriculum materials. *Teaching and Teacher Education, 51*, 16–26. https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.05.009

Li, J. (2004). Thorough understanding of the textbook: A significant feature of Chinese teacher manuals. In L. Fan, N. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 262–281). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789812562241_0010

Lindvall, J., Helenius, O., Eriksson, K., & Ryve, A. (2021). Impact and design of a national-scale professional development program for mathematics teachers. *Scandinavian Journal of Educational Research, 66*(5), 744–759. https://doi.org/10.1080/00313831.2021.1910563

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning* (Gothenburg Studies in Educational Sciences, No. 323). Acta Universitatis Gothoburgensis. http://gupea.ub.gu.se/handle/2077/29645

McGrenere, J., & Ho, W. (2000). Affordances: Clarifying and evolving a concept. In *Proceedings of Graphics Interface 2000* (pp. 179–186). Canadian Human-Computer Communications Society. https://doi.org/10.20380/GI2000.24

Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 331–355. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y

Nordgren, K., Kristiansson, M., Liljekvist, Y., & Bergh, D. (2019). *Lärares planering och efterarbete av lektioner – Infrastrukturer för kollegialt samarbete och forskningssamverkan* [Teachers' planning and assessing of lessons: Infrastructures for collegial collaboration and research cooperation] (Karlstad University Studies, 2019:11). Karlstads universitet. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1298162/FULLTEXT01.pdf

Nordgren, K., Kristiansson, M., Liljekvist, Y., & Bergh, D. (2021). Collegial collaboration when planning and preparing lessons: A large-scale study exploring the conditions and infrastructure for teachers' professional development. *Teaching and Teacher Education, 108*, 103513. https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103513

OECD. (2025). *How can research and initial teacher education institutions support research use?* (OECD Education Policy Perspectives, No. 129). OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/7a197444-en

Pepin, B. (2018). Enhancing teacher learning with curriculum resources. In L. Fan, L. Trouche, Q. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues* (pp. 359–374). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_17

Pepin, B., & Gueudet, G. (2020). Curriculum resources and textbooks in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 172–176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Persson, A. (2016). *Frågor och svar: Om frågekonstruktion i enkät- och intervjuundersökningar* [Questions and answers: Construction of questions in surveys and interviews]. Statistiska centralbyrån (SCB).

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research: Part A: An introduction*. (pp. 11–50). SLO.

Plomp, T., & Nieveen, N. (2013). *Educational design research: Part A: An introduction*. SLO.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM – Mathematics Education*, *40*(2), 165–178. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z

Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education, 7*. 969212. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.969212

Pu, S., Sun, X., & Li, Y. (2018). How do Chinese teachers acquire and improve their knowledge through intensive textbook studies? In Y. Li & R. Huang (Eds.), *How Chinese acquire and improve mathematics knowledge for teaching* (pp. 165–184). Brill.

Quebec Fuentes, S., & Ma, J. (2018). Promoting teacher learning: A framework for evaluating the educative features of mathematics curriculum materials. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(4), 351–385. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9366-2

Rabardel, P. (2002). *People and technology: A cognitive approach to contemporary instruments*. (H. Wood, Trans.). Armand Colin. https://hal.science/hal-01020705/document (Original work published 1995).

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal, 100*(4), 331–350. https://doi.org/10.1086/499645

Remillard, J. T., & Bryans, M. B. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials: Implications for teacher learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 352–388. https://doi.org/10.2307/30034820

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Remillard, J. T. (2012). Modes of engagement: Understanding teachers' transactions with mathematics curriculum resources. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 102–122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_6

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources*. (pp. 69–88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4

Remillard, J. T. (2019). Teachers' use of mathematics resources: A look across cultural boundaries. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The 'resource' approach to mathematics education: Advances in mathematics education* (pp. 173–194). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1_8

Remillard, J. T., Condon, L., Koljonen, T., Krzywacki, H., & Sayuj, R. (2026). Teacher agency and the use of mathematics curriculum materials across cultural contexts. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–16. https://doi.org/10.1080/00313831.2026.2623283

Rezat, S. (2014). Teacher guides as instruments for teaching mathematics: A case study. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, & L. Fan (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (pp. 401–406). University of Southampton. https://eprints.soton.ac.uk/374809/1/ICMT-2014_proceedings150331.pdf

Rezat, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM – Mathematics Education, 53*(6), 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Rezat, S. (2024). Research on curriculum resources in mathematics education: A survey of the field. *ZDM – Mathematics Education, 56*(2), 223–237. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01559-x

Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings*. (4th ed.). Wiley.

Roth McDuffie, A., Choppin, J., Drake, C., & Davis, J. (2018). Middle school mathematics teachers' orientations and noticing of features of mathematics curriculum materials. *International Journal of Educational Research, 92*, 173–187. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.019

Rycroft-Smith, L. (2022). Knowledge brokering to bridge the research-practice gap in education: Where are we now? *Review of Education, 10*(1), e3341. https://doi.org/10.1002/rev3.3341

Rycroft-Smith, L., & Stylianides, A. J. (2022). What makes a good educational research summary? A comparative judgement study of mathematics teachers' and mathematics education researchers' views. *Review of Education, 10*(1), 1–48. https://doi.org/10.1002/rev3.3338

Sandoval, W. (2014). Conjecture mapping: An approach to systematic educational design research. *Journal of the Learning Sciences, 23*(1), 18–36. https://doi.org/10.1080/10508406.2013.778204

Schilling, S. G., Blunk, M., & Hill, H. C. (2007). Test validation and the MKT measures: Generalizations and conclusions. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives, 5*(2–3), 118–128. https://doi.org/10.1080/15366360701487146

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, *47*(6), 641–649.

SFS 2010:800. *Skollag* [Swedish Education Act]. https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800/

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sjölund, S., Lindvall, J., Larsson, M., & Ryve, A. (2022). Using research to inform practice through research-practice partnerships: A systematic literature review. *Review of Education, 10*(1), e3337. https://doi.org/10.1002/rev3.3337

Stein, M. K., & Kaufman, J. H. (2010). Selecting and supporting the use of mathematics curricula at scale. *American Educational Research Journal, 47*(3), 663–693. https://doi.org/10.3102/0002831209361210

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press.

Stolpe, K. (2021). Forskningslitteracitet – Att läsa, värdera och använda forskning i praktiken [Research literacy – Reading, evaluating, and using research in practice]. *ATENA Didaktik, 3*(1). https://doi.org/10.3384/atena.2021.3677

Stolpe, K. (2024). Forskningslitteracitet i praktiken: Lärares motiv till att läsa och använda forskning [Research literacy in practice: Teachers' motives for reading and using research]. *Pedagogisk Forskning i Sverige, 29*(1–2), 7–30. https://doi.org/10.15626/pfs29.0102.01

Stylianides, G. J. (2008). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(1), 191–215. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9074-y

Superfine, A. C. (2009). The "problem" of experience in mathematics teaching. *School Science and Mathematics, 109*(1), 7–19. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb17858.x

Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192–195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_180

Sönnerhed, W.W. (2011). *Mathematics textbooks for teaching: An analysis of content knowledge and pedagogical content knowledge concerning algebra in Swedish upper secondary education* (Licentiate thesis, Göteborgs universitet). DiVA. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:468576/FULLTEXT01.pdf

Taylor, M. W. (2013). Replacing the 'teacher-proof' curriculum with the 'curriculum-proof' teacher: Toward more effective interactions with mathematics textbooks. *Journal of Curriculum Studies, 45*(3), 295–321. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.710253

Tengberg, M., van Bommel, J., Nilsberth, M., Walkert, M., & Nissen, A. (2021). The quality of instruction in Swedish lower secondary language arts and mathematics. *Scandinavian Journal of Educational Research, 66*(5), 760–777. https://doi.org/10.1080/00313831.2021.1910564

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281–307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). Documentational approach to Didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 237–247). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100011

Trouche, L. (2020). Instrumentation in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 390–395). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_80

Trouche, L., Adler, J., & Remillard, J. T. (2023). Conceptualizing teachers' interactions with resources in crossing languages and cultures. *ZDM – Mathematics Education, 55*(3), 497–519. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01488-1

van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds.), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1–14). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4255-7_1

van Steenbrugge, H., & Ryve, A. (2018). Developing a reform mathematics curriculum program in Sweden: Relating international research and the local context. *ZDM – Mathematics Education, 50*(5), 801–812. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0972-y

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167–181. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3

Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. Oxford University Press.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed* (Reviderad utgåva) [Good research practice (Revised edition)]. Vetenskapsrådet. https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2017-08-29-god-forskningssed-2017.html

Yinger, R. (1980). A study of teacher planning. *The Elementary School Journal, 80*(3), 107–127. https://doi.org/10.1086/461181

Österholm, M., Bergqvist, T., Liljekvist, Y., & van Bommel, J. (2024) Professional development at national scale: Effects on teacher knowledge and practice. *Studies in Educational Evaluation, 83*, 101381. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2024.101381

Appendix A

Lärarguide för planering av undervisning av andragradsekvationer

Marcus Gustafsson

Inledning

Den här lärarguiden för undervisning av andragradsekvationer är designad för den här forskningsstudien. De typer av innehåll som är med i den baseras på sådant som tidigare forskning pekat på potentiellt skulle kunna vara stödjande för dig som lärare när du planerar för att genomföra undervisning om andragradsekvationer. Du som lärare och läsare är den som vet vad som skulle kunna vara stödjande för just dig i din lärarpraktik. Därför presenteras här i början en översikt över guidens innehåll så att du själv kan välja hur och vad du vill läsa.

I den här guiden kommer du hitta följande avsnitt:

1. Tidigare forskning om elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer
2. Förslag på lektionsaktiviteter som kan användas vid undervisning av andragradsekvationer
    - Aktivitet 1 – Introduktion av andragradsekvationer
    - Aktivitet 2 – Identifiera typer av andragradsekvationer och lös tillsammans
    - Aktivitet 3 – Diskriminanten
    - Aktivitet 4 – Olika lösningsmetoder
    - Aktivitet 5 – Identifiera och rätta till vanliga misstag
3. Uppgiftsmaterial att använda i undervisning
    - Uppgifter från frisläppta Nationella prov
    - Utmanande uppgifter
    - Lathund för olika typer av ekvationer och deras lösningsmetoder
    - Exit tickets
4. Fördjupande kommentarer kring undervisning av andragradsekvationer baserat på lärarerfarenhet
5. Andragradsekvationer i en svensk gymnasiekontext
6. Referenslista

Om designen och innehållet

Det finns flera sätt för hur de olika typerna av innehåll som presenterats i termer av avsnitt kan fyllas. I den här guiden är de olika innehållen i avsnitten framtagna på följande sätt.

Forskningsartiklar som behandlar lärande eller undervisning av andragradsekvationer söktes i forskningsdatabaser och några nedslag från dessa som bedömdes som relevanta beskrivs i avsnitt 1. I en referenslista längst bak återfinns de studier som hänvisas till. Dessa markeras i texten genom [1,2,3, …].

I avsnitt 2 finns sedan några förslag på lektionsaktiviteter som designats för att försöka adressera en del av det som beskrivits från tidigare forskning. Dessa är designade på ett visst sätt, med vissa bakomliggande principer av variationsteorin, som i den här guiden har använts eftersom det rimmar med vad viss tidigare forskning antytt. De är dock inte utprövade i undervisning i större skala, men här erbjuds de som förslag att använda som de är eller inspireras eller utgå ifrån inom ramen för den professionella planeringen.

I avsnitt 3 finns uppgifter av olika typer. NP-uppgifter sammanställdes från tidigare frisläppta prov fritt tillgängliga online. En lathund baserad på förslag från en av de ingående forskningsartiklarna skapades för en svensk kontext. Länkar till några utmanande uppgifter söktes online och sammanställdes. Förslag på uppgifter att testa elevernas förståelse efteråt skapades till exit tickets.

I avsnitt 4 finns fördjupande kommentarer kring undervisning av andragradsekvationer, som skrevs ned baserat på lärarerfarenhet och presenteras i relation till tidigare forskning.

Ämnesplaner, läromedel, och nationella prov undersöktes utifrån hur andragradsekvationer behandlades i dem och detta finns beskrivet i avsnitt 5.

1. Tidigare forskning om elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer

Här följer nu en sammanställning av några nedslag från forskningsstudier som gjorts internationellt med huvudfokus kring undervisning och lärande av andragradsekvationer.

Aritmetisk och algebraisk förförståelse

Aritmetisk och algebraisk förförståelse betonas som viktiga förkunskaper för elever som ska ta sig an andragradsekvationer[1]. Till exempel behöver man som elev kunna hantera negativa tal, skriva om ekvationer till en ekvivalent form (t.ex. $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$), eller korrekt tolka algebraiska uttryck som till exempel $\frac{a}{2}$ som ”en halv a”[2].

Vissa av elevers tidigare erfarenheter från linjär ekvationslösning kan dock också ställa till det vid lösning av andragradsekvationer. Detta då aritmetiska metoder och operationer som fungerat tidigare används även när det inte längre fungerar[3]. Detta gör till exempel att en elev kan vilja dela bort x på båda sidor av till exempel $x^2 = 4x$ så att eleven får $x = 4$ (och att lösningen $x = 0$ försvinner) [4]. Den typen av misstag skulle kunna samverka med en begränsad förståelse om antalet lösningar till en andragradsekvation, så att eleven inte ser något problem med att det bara blir en lösning kvar.

Om elever inte har en upparbetad förståelse för relationen mellan absolutbelopp och kvadrattal, d.v.s. enligt definitionen att $\sqrt{x^2} = |x|$, kan det vara svårt att bygga vidare förståelse för andragradsekvationer och deras lösningar[5]. Detta innebär till exempel att elever behöver inse att $x^2 = 4$ ger lösningarna $x = \pm 2$ men att $\sqrt{4} \neq \pm 2$.

För att kunna ta sig an andragradsekvationer, behöver elever också veta vad en *ekvation* och dess beståndsdelar är, samt vad det innebär att lösa en ekvation, eller vad som menas med en ”lösning”[6]. Det har visat sig att elever efter genomgången undervisning av andragradsekvationer kan ha problem som grundar sig i just problem med själva ekvationsbegreppet, men också med variabelbegreppet, och begreppet grad på en ekvation[7]. När elever också fått frågor om att beskriva eller själva definiera vad en andragradsekvation är, så har en del elever blandat ihop dem med linjära ekvationer, eller med andragradsuttryck, och de andragradsekvationer som ges som exempel av eleverna är enbart de vanligaste på standardform. Dessutom har elever angett svar som beskriver lösningsmetoder av andragradsekvationer, som något som ska göras, istället för själva ekvationerna.

Elever behöver också ha en viss variabelförståelse vid lösandet av andragradsekvationer. En svårighet kan synas hos elever som att x^2 och $2x$ är två *olika* variabler när de står i samma uttryck, och att det är det som gör ekvationen till en andragradsekvation[8]. En annan variant av variabel(miss)förståelse är att tro att $(x-3)(x-5) = 0$ har lösningen $x = 3$ och $x = 5$ samtidigt, d.v.s. att första och andra x:et är ”olika x” och att variabeln därmed kan ha två olika värden samtidigt[9].

Lösningsstrategier och dess svårigheter

Något som kan vara svårt med att lösa andragradsekvationer är att kunna välja en lämplig lösningsmetod. Strategier för att lösa andragradsekvationer, om de framhålls av läraren i undervisningen som extra viktiga, kan överanvändas av elever i situationer, även där det även inte är lämpligast tillvägagångssätt[10]. Detta kan till exempel vara att de använder sig av den allmänna lösningsformeln när nollprodukt skulle vara lämpligare. Här följer några nedslag kring svårigheter som kan uppstå i samband med olika typer av lösningsmetoder.

Definitionen av en andragradsekvation (i en variabel) ges av ekvationer som kan skrivas som $ax^2 + bx + c = 0$, där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Med ord kan sägas en ekvation där båda sidorna av likhetstecknet (men oftast bara ena) är ett polynom av minst och högst grad 2. Det går att dela upp sådana ekvationer i tre typer: enkla ($b = 0$), sådana som kan skrivas, eller redan är, på faktorform ($c = 0$), eller fullständiga ($a, b, c \neq 0$). Vad som är en effektiv lösningsmetod varierar därför med typ av ekvation.

Enkla andragradsekvationer, $b = 0$ (ex. $x^2 = 4$)

En vanlig metod för lösning av dessa är att använda den så kallade kvadratrotsmetoden. Vanliga misstag elever gör här är till exempel att bara hitta den positiva roten[11] kopplat till att inte känna till att det är två lösningar som söks. Att själva $\sqrt{4} = \pm 2$ är en missuppfattning som elever kan ha vilket kan visa sig i ekvationslösning[12] av enkla andragradsekvationer genom att $x^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} = \pm 2$, som kan hänga samman med den tidigare beskrivna förkunskapen.

Andragradsekvationer (som går att skriva, eller redan är skrivna) på faktorform $c = 0$, (ex. $x^2 - 3x = 0$ eller $(x + 1)(x - 2) = 0$)

En vanlig metod för lösning med av dessa är med nollproduktsmetoden (eller nollprodukts*egenskapen* som det kallas internationellt). Det har dock visat sig finnas vissa svårigheter med detta. Ett angreppssätt för elever att lösa en ekvation av typen $(x - 3)(x - 5) = 0$ är till exempel att multiplicera ihop parenteserna och sedan fastna, eller att multiplicera ihop dem och sedan felaktigt faktorisera[13]. Detta kan höra samman med bristande idéer av vad själva begreppet nollprodukt innebär. Att kunna koppla ihop begreppen att en faktor $(x + 1)$ motsvarar lösningen $x_1 = -1$, och vad skillnaden på begreppet faktor och lösning är har också visat sig vara ett problem[14]. Detsamma är att koppla avläsningen av lösningarna till en ekvation som t.ex. $(x + 2)(x - 4) = 0$ som $x_1 = 2$ och $x_2 = -4$, det vill säga att mer instrumentellt bara ta talen rakt av, utan att ta hänsyn till att det ska vara värdena som ger faktorn noll, så att tecknet måste ändras. Detta kan också synas i varianter på detta misstag som att en faktor $(2x + 3)$ ger lösningen $x_1 = -3$, det vill säga att tecknet är korrekt men faktorn ignoreras[15].
En del elever försöker att faktorisera $x^2 - 4x = 8$ som $x(x - 4) = 8$, som är en korrekt faktorisering av VL, men sedan kör att $x_1 = 0$ och $x_2 = 4$ och ignorerar högerledet[16].

Fullständiga andragradsekvationer (ex. $2x^2 + 4x + 7 = 0$)

En vanlig metod för att lösa den här typen är med lösningsformeln, som i Sverige ofta är den så kallade ”pq-formeln”, det vill säga att ekvationen $x^2 + px + q = 0$ ger lösningarna av $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Internationellt används oftast istället ”abc-formeln” $ax^2 + bx + c = 0$ med lösningarna $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$.

Misstag som görs när andragradsekvationer löses med lösningsformeln är oftast aritmetiska, till exempel att det görs felaktiga beräkningar med bråkräkning under rottecknet[17] eller att misstag görs med att substituera variablernas värde från andragradsekvationen till lösningsformeln. Detta innebär också att sätta in värden från en andragradsekvation som ännu inte är skriven på en form där lösningsformeln kan användas.

Kvadratkomplettering används också som lösningsmetod, men elever kan uppleva denna som svårare och mer utmanande[18]. Problem som uppstår här kan vara att inte algebraiskt lyckas med stegen från en ekvation som exempelvis $x^2 + 4x = 12$ som leder till $(x+2)^2 - 4 = 12$, och att därifrån ta det till $x + 2 = \pm 4$.

Möjliga implikationer för undervisning

Variera utseenden och situationer av andragradsekvationer

Det kan vara gynnsamt för elevers lärande om man som lärare ser till att eleverna får uppleva en rad olika situationer där de har möjlighet att urskilja t.ex. de olika typerna av andragradsekvationer skrivna på olika sätt, och olika typer av tal som koefficienter[19]. Det är viktigt att mycket tid läggs på att introducera definitionen av en andragradsekvation, och att i det sammanhanget se till att variera olika typer av ekvationer och olika typer av andragradsekvationer som sträcker sig bortom de med standardutseende[20].

Lägga fokus på kvadrattal och absolutbelopp

Det är viktigt att tid läggs på att utforska egenskaperna hos absolutbelopp och kvadrattal och dess relation till andragradsekvationer[21].

Stödja elever i att identifiera och välja lösningsmetoder

För att stödja elever i val av lösningsmetoder så att de lämpligaste lösningsmetoderna väljs för olika typer av andragradsekvationer skulle en lathund kunna ges[22].

Använda vanliga elevmisstag i undervisning

Användandet av felaktigt lösta ekvationer som exempel i undervisningen har visat positiv effekt på algebraisk ekvationslösning av andragradsekvationer, och effekten har visat sig vara störst på de elever som kunde minst innan[23].

Använda geometriska modeller

Att använda geometriska modeller, antingen digitala eller analoga, föreslås som ett sätt för att skapa förståelse för faktorisering och kvadratkomplettering[24].

Gör kopplingar mellan olika begrepp

Att göra explicita kopplingar mellan andragradsfunktioner och andragradsekvationer föreslås av flera studier som en väg att gå för att minska den mekaniska inlärningen och bygga begreppsmässiga kopplingar[25]. Elever bör ges möjlighet att göra kopplingar mellan textproblem till andragradsekvationer och symboliska andragradsekvationer eftersom det är en svårighet[26].

2. Förslag på lektionsaktiviteter som kan användas i undervisning av andragradsekvationer

För att möta det som framkommit i tidigare forskning i undervisningen följer här förslag på lektionsaktiviteter som skulle kunna användas i undervisningen med motiveringar till vad aktiviteterna är tänkta att syfta till. Några utvalda identifierade frågor (F1-F4) att hantera, baserat på tidigare forskning i avsnitt 1 är:

- F1: Stötta elevers olika förkunskaper, associerade med begreppskunskap om t.ex. uttryck, ekvationer, lösningar/rötter, grad, bråkräkning och negativa tal
- F2: Utveckla elevers olika aritmetiska och algebraiska förmåga, som till exempel att skriva om ekvivalenta uttryck till olika form, faktorisera och förenkla
- F3: Stötta elever i att identifiera typer av andragradsekvationer och välja lösningsmetoder därefter
- F4: Förebygga vanliga misstag som kan uppstå hos elever i lösandet av andragradsekvationer av olika typer

Aktiviteterna finns i sin helhet i den tillhörande filen **Bilaga 1** som medföljer denna lärarguide. De är i word-format, så att du som lärare kan modifiera dem så att de passar din undervisning.

Aktivitet 1 – Introduktion av andragradsekvationer

En möjlig introduktionsaktivitet. Syftet är att eleverna ska få öva på att skilja ut en andragradsekvation från övriga matematiska objekt såsom förstagradsekvationer, andragradsuttryck eller första- eller andragradsfunktioner. Genom aktiviteten visas möjligheter att koefficienterna inte alltid måste vara hela tal, utan även rationella tal skrivna i decimal och bråkform, samt irrationella tal. *Designad för att hantera F1 och F2.*

Aktivitet 2 – Identifiera typer av andragradsekvationer och lös tillsammans

En möjlig aktivitet med syfte att eleverna själva ska öka sin säkerhet genom att öva på att lösa andragradsekvationer. En variant från individuellt arbete i läroboken där elever samtidigt kan ta hjälp av varandra. *Designad för att hantera F2 och F3.*

Aktivitet 3 – Diskriminanten

En möjlig aktivitet med syfte att introducera diskriminanten och dess betydelse för antalet lösningar till en andragradsekvation. Elever är delaktiga i aktiviteten med att upptäcka och avgöra om andragradsekvationer har (reella) lösningar eller inte. *Designad för att hantera F1.*

Aktivitet 4 – Olika lösningsmetoder

En möjlig aktivitet med syftet att elever ska lära sig känna igen de olika typer eller utseenden av andragradsekvationer, och konsekvenser för vilka lösningsmetoder som då är möjliga och vilka som är effektiva. *Designad för att hantera F2 och F3.*

Aktivitet 5 – Identifiera och rätta till vanliga misstag

En möjlig aktivitet med syftet att förebygga vanliga misstag. I aktiviteten får elever undersöka och upptäcka vanliga misstag i elevlösningar, samt rätta till dem. *Designad för att hantera F4.*

3. Uppgiftsmaterial att använda i undervisning

Dessa uppgiftsmaterial finns i den tillhörande filen **Bilaga 2** som medföljer denna lärarguide. De är i word-format, så att du som lärare kan modifiera dem så att de passar din undervisning.

Uppgifter från frisläppta Nationella prov

Är tänkta att du som lärare ska kunna se ungefär vad kraven nationellt sett ligger kring vad en elev ska kunna, samt som exempel att visa, eller för elever att arbeta med.

Utmanande uppgifter

Är tänkta för att du som lärare ska kunna ge som utmaningar till de elever som behöver det.

Lathund för olika typer av ekvationer och deras lösningsmetoder

Är tänkt som ett möjligt stöd att ge till elever, eller som en mall att skapa en begreppskarta tillsammans med eleverna på tavlan.

Exit tickets

Är tänkta att kunna använda i slutet av en lektion eller lektionsdel för att undersöka elevernas förståelse, vad de fått med sig.

4. Fördjupande kommentarer kring undervisning av andragradsekvationer baserat på lärarerfarenhet

Här följer nu några fördjupande kommentarer med förslag kring hur undervisning kan ske, presenterat i relation till förra avsnittet om tidigare forskning. Läs denna del i mån av tid. Denna del bygger på lärarerfarenhet av att undervisa om andragradsekvationer, och ger förslag utifrån sådan erfarenhet. Det är dock inte en systematisk sammanställning av alla lärares erfarenheter. Denna del kan läsas för att ge inspiration till exempelvis förklaringar som görs vid genomgångar eller diskussioner med elever.

För att hantera svårigheter med begreppen

Vid något tillfälle kan det vara bra om vi som lärare reder ut med eleverna att $3x^2 + 2x + 5$ är ett andragrads*uttryck*, att $3x^2 + 2x + 5 = 12$ är en andragrads*ekvation*, att $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ är en andragrads*funktion* och att $y = 3x^2 + 2x + 5$ egentligen är en andragrads*ekvation* i *två* variabler, även om det ofta (även i läromedel) benämns som en andragrads*funktion*. Och det stämmer ju i den meningen att en andragradsekvation i två variabler går att åskådliggöra i ett koordinatsystem på precis samma sätt som funktionen $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ kan göra. Det är ju faktiskt så att man skriver $y = f(x)$ i grafen för att vara tydlig att det är funktionsvärdet till grafen som är y-värdet. Detta gör ju att i en gymnasiekontext så spelar det kanske inte så stor roll om man är slarvig med begreppen funktion eller ekvation i två variabler, men det kan det göra för förståelsen av att en funktion och en ekvation är olika saker. Samma sak finns det här med räta linjens ekvation, som behandlas som att det vore en funktion, även fast det heter ekvation. Det skulle kunna vara en av anledningarna till att en elev inte ser skillnad mellan ekvation och funktion, eftersom de haft den upplevelsen.

En andragradsekvation kan uppstå från *andragradsfunktioner*, där ett visst värde på variabeln x söks för ett visst funktionsvärde $y = f(x)$. Vanligt är att det dyker upp när en funktions nollställen ska bestämmas, d.v.s. de värden på x, för vilka grafen till andragradsfunktionen skär genom x-axeln då $y = 0$ ska bestämmas. Då är det inte så konstigt om elever blandar ihop skillnaderna, speciellt om vi lärare inte är noga med vad vi säger.

Något som också verkar vara svårt är orden ”lösningar” eller ”rötter”. Det kan vara en bra idé att då och då beskriva och förklara dem med andra ord när de används. Till exempel ”hur kan vi veta om det finns två lösningar till den här ekvationen? Alltså, hur kan vi veta om det finns två tal vi kan stoppa in och likheten stämmer för båda talen?”. Eller ”hur många rötter finns det? Kom ihåg att rot är samma ord som lösning, som betyder att likheten stämmer (eller är sann) om man sätter in värdena på x:ets plats”.

För att ytterligare hantera problem med förståelsen av andragradsekvationer som baseras på elevers eventuella brist på förkunskaper kan man repetera vad en ekvation är, vad en variabel är, samt vad grad är.

Något som också kan vara viktigt här, är att kunna skriva om ekvationer till andra ekvivalenta ekvationer. Att alltså ha med ekvationer av typen $x^2 + 4x = 16$ som man gör om, och elever får själva öva att göra om till $x^2 + 4x - 16 = 0$. Att dessutom variera koefficienter från positiva heltal, till negativa tal, till tal skrivna i decimalform eller bråkform och fokusera på att repetera hur man kan tänka i en sådan situation kan hjälpa till. Till exempel kan $0{,}1x^2 - 2x + 3{,}6 = 0$ ge möjlighet att repetera decimalberäkningar i huvudräkning, eller $x^2 - \frac{x}{2} - 6 = 0$ ge möjlighet att repetera bråkräkning. Att variera koefficienternas typ på det här sättet skulle kunna hjälpa elever till insikt om att ekvationerna har en struktur som inte är beroende av vilken typ av koefficienter det är.

Enkla andragradsekvationer

När det kommer till att lösa "enkla" andragradsekvationer så kan det vara viktigt att påpeka att man får vara noggrann när och om man "tar roten ur" på båda sidor. Problemet kommer egentligen i första steget när man t.ex. löser ekvationen:

$$x^2 = 16$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

Om man här tänker att nästa steg ger $\sqrt{x^2} = x$ (som inte är sant annat än för $x > 0$), och man "vet" att det ska finnas två lösningar, så är det enda sättet att lösa detta på genom att låta $\sqrt{16} = \pm 4$ (som ju inte är sant), så att $x = \pm 4$. Detta slutresultat är ju sant, men det tidigare steget stämmer ju inte då $\sqrt{16}$ endast är positivt 4. Som lärare gör man ofta en förklaring med att göra samma, ta roten ur på båda sidorna, för att eleverna ska känna igen sig i övrig ekvationslösning. Problemet som då kan uppstå i den här situationen, förutom att bara hitta en rot, är att det kan förstärka missförstånd av typen $x^2 = 4x + 16$ som då blir $\sqrt{x^2} = \sqrt{4x + 16}$, som i värsta fall sedan blir $x = 2x + 4$, om "att ta roten ur" görs på ett felaktigt sätt.

Skulle man göra en mer matematiskt korrekt lösning där man "tar roten ur" på båda sidor, och korrekt använder att $\sqrt{x^2} = |x|$, skulle man behöva göra följande:

$$x^2 = 16$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$$|x| = \sqrt{16}$$

$$|x| = 4$$

$$x = \pm 4$$

Detta skulle kunna visas, men risken är att detta resonemang inte är lätt att göra som lärare, eller lätt för elever att följa, eftersom begreppet absolutbelopp oftast inte har introducerats ännu. Enligt centralt innehåll ligger det i kurs Matematik 3c (efter Gy25 i Matematik fortsättning, nivå 1c) som är efterliggande. Visserligen är begreppet absolutbelopp med i relation till trigonometri som längd på vektor, men detta är en annan betydelse som inte hjälper i dessa algebraiska situationer.

Ett sätt, som lärare förmodligen använder, är därför att säga att ekvationen

$$x^2 = 16$$

utan mellansteg har lösningarna

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

som ju inte gör våld på matematiken, som steget $\sqrt{x^2} = x$ gör. Det kan vara en gyllene medelväg att använda på det här stället i matematikkurserna.

En variant av lösning som leder vidare till nästa "metod" eller typ av ekvationer som löses genom att faktorisera via att bryta ut är att bygga på konjugatregeln (som vissa elever hunnit lära sig innan). Då skulle lösningen kunna göras genom

$$x^2 = 16$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

som enligt nollproduktsegenskapen (nollproduktsmetoden i Sverige) ger lösningarna $x_1 = -4, x_2 = 4$.

En svårplacerad typ av andragradsekvation är t.ex. $(x - 1)^2 = 25$ där många elever kanske skulle vilja utveckla parentesen i vänster led. Då ser vi att det är en ekvation som har x^2-term, x-term och konstantterm och som skulle passa med lösningsformel till. Dock är ju det en omväg och något som man vill komma ifrån, eftersom $(x - 1)^2 = 25$ enklast löses som en "enkel" andragradsekvation, med $(x - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = 1 \pm 5$.

Detta är dessutom ett viktigt steg i kvadratkomplettering. Det kan därför vara bra att ta med dessa binom-ekvationer redan under förklaringar och exempel som handlar om de första "enkla" andragradsekvationerna.

Andragradsekvationer (som går att skriva, eller redan är) på faktorform

Andragradsekvationer på faktorform kan ses som två olika typer av ekvationer, eller i alla fall skulle de kunna uppfattas så av elever. Dessa är

- de som behöver faktoriseras innan de kan lösas med egenskapen av nollprodukt, till exempel

$$x^2 - 6x = 0 \text{ eller } 5x^2 = -20x$$

- de som redan är faktoriserade, till exempel

$$3x(x - 2) = 0 \text{ eller } (x + 3)(x - 5) = 0.$$

Som tidigare beskrivits krävs aritmetiska förkunskaper som här skulle kunna visa sig genom problem med att bryta ut en faktor för de som behöver faktoriseras. För de som redan är faktoriserade är det idén om nollprodukt som är en potentiell svårighet, som gör att en del elever kan vilja multiplicera ihop parenteserna, och sedan eventuellt använda lösningsformel eller fastna. Att påpeka dessa två olika utseenden för eleverna skulle kunna hjälpa deras förståelse för andragradsekvationer på faktorform och att kunna välja lösningsmetod.

Ordningsmässigt skulle det kunna vara en idé att först bara titta på redan faktoriserade andragradsekvationer, innan sådana som kräver faktorisering först. Om man går på de redan faktoriserade ekvationerna först och beskriver hur de löses, kan man motivera att vi då behöver faktorisera för att lösa dem.

Fördelen med att lägga faktoriserade andragradsekvationer först, skulle vara för att lägga huvudfokus på lösningsmetoden som egentligen är användandet av den generella nollproduktsmetoden(eller *egenskapen*), som också är mer generell för polynomekvationer av högre grad. Nollproduktsegenskapen är viktig i matematik, inte bara för lösandet av vissa andragradsekvationer. Att lägga faktoriserade andragradsekvationer först skulle också kunna hjälpa till att hindra att själva faktoriseringen genom utbrytning av största gemensamma faktor tar fokus från den bakomliggande idén om nollprodukt.

För att knyta an till och repetera tidigare aritmetiska egenskaper kan nollprodukt först motiveras med enklare numeriska påståenden som till exempel. $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 6 = 0$. Så länge det finns en faktor som är noll, så är hela uttryckets värde det också. Sedan kan då övergången till att titta på varje faktor i $x \cdot (x-2) = 0$ göras. Att faktoriseringen görs för att man ska kunna titta på varje faktor enskilt är själva huvudpoängen.

Något om de som behöver faktoriseras:

Lösning med faktorisering av ekvationer av typen $ax^2 + bx + c = 0, c = 0$ ges genom att bryta ut största gemensamma faktor ur t.ex.

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

där lösningarna ges av $x_1 = 0$ och $x_2 = 5$. Påpekas kan då alltså att om en andragradsekvation redan står i faktorform, som $x(x-2) = 0$ eller $(2x-4)(x+1) = 0$ så behöver den inte faktoriseras, och då är den ”redan färdig” för att bestämmas lösningarna till genom nollproduktsmetoden.

I alla fall där $c = 0$ så får vi ekvationer av typen $ax^2 + bx = 0$. Ekvationerna är då ofta skrivna som $ax^2 = bx$ vilket öppnar för misstag av typen att dividera bort x från båda sidor och tappa en lösning. Om detta påpekas kan elever få syn på detta så att risken för det misstaget minskas.

Något om de som redan är faktoriserade:

För att ännu mer peka på nollproduktsmetoden för faktoriserade uttryck kan det vara värt att göra en strukturerad variation av exempel som gradvis ökar komplexitet, som till exempel:

$$x(x-2) = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3) = 0$$

$$(4x+2)(x+3) = 0$$

$$\left(6x + \frac{1}{2}\right)(x-3{,}7) = 0$$

Ekvationerna här går från att ha plus och minus inom parentes, till att ha binom i båda parenteserna, till att ha bråk i en parentes, till att ha en koefficient till $x \neq 1$ inom en parentes, till att ha blandning av positiv och negativ. Den här typen av påbyggnad av enkelt utseende till mer avancerat där en sak varieras i taget föreslås inom variationsteorin som ett sätt att ge elever möjligheter att se viktiga bakomliggande strukturer. Vill man så kan man också för varje rad, eller för några av raderna skriva om ekvationerna på utvecklad form, så att eleverna får möjlighet att se att ekvationerna på faktorform också ser ut som standardformen.

Att dessutom lägga till fler faktorer såsom $(4x+2)(x+3)(x-1)=0$ och $(4x+2)(x+3)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ och $x(4x+2)(x+3)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ kan vara ytterligare ett sätt att strukturerat variera möjligheterna för ekvationer på faktorform där flera lösningar finns, och att varje faktor motsvarar en ny lösning. Det skulle kunna göra att en del elever kan se det generella i att antal faktorer inte spelar någon roll för sättet att tänka hur lösningarna tas fram från varje faktor parallellt. Viktigt är dock att peka på att det slutar vara en andragradsekvation när det finns fler än två lösningar. Att visa detta skulle kunna vara en förberedelse inför Matematik 4 och polynomekvationer av högre grad, som också är viktigt för universitetsmatematiken.

Egentligen kan ju alla andragradsekvationer som har reella lösningar skrivas i faktorform, och tids nog i undervisningen kommer ju detta göras, t.ex. att gå från lösningarna $x_1=2$ och $x_2=\frac{1}{3}$ till ekvationen $(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$. Det sker bland annat i samband med andragradsfunktioner när nollställen läses av i en graf.

Fullständiga andragradsekvationer

Andragradsekvationer på formen, $x^2+px+q=0$ kan lösas på olika sätt, med kvadratkomplettering, eller med lösningsformeln. Kvadratkomplettering leder fram till att lösningarna direkt kan ges av $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, enligt pq-formeln. (Eller abc-formeln om koefficienten till x^2 ej är 1).

Med kvadratkomplettering

Det finns en rad olika sätt och metoder för att kvadratkomplettera. En fördel med kvadratkomplettering är att det förutom en algebraisk manipulation också kan åskådliggöras geometriskt med en figur[1], som föreslagits som ett bra sätt att bygga konceptuell förståelse. Det finns flera färdiga GeoGebra-applikationer för detta[2] som med fördel kan användas vid demonstration eller för elevers egna undersökande.

Med lösningsformel

Misstag som elever kan råka göra med lösningsformeln är oftast algoritmiska eller aritmetiska. Det kan handla om att inte läsa av koefficienter rätt så att fel värden sätts in i formeln, byta tecken, att kvadrera felaktigt, eller att göra misstag när bråk under rottecknet läggs samman. Sådana misstag kan bero på flera olika kunskapsluckor och kan vara svåra att förebygga.

Ett sätt att få elever att vara säkrare i själva lösningsformelalgoritmen skulle kunna vara att göra en schematisk förklaring av vad som händer, snarare än att tänka på att substituera värdena från ekvation till lösningsformel. I ekvationen $x^2+4x+3=0$ skulle en elev som använder lösningsformeln med substitution stoppa in värden på p och

---

[1] Se t.ex. artikel från Nämnaren, https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3742_14_3.pdf

[2] Se t.ex. https://www.geogebra.org/m/PP6tAEZ8 eller https://www.geogebra.org/m/ecvnznst

q så att $x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$ och sedan kunna göra diverse misstag vid bråkräkning eller vid kvadrering, på grund av bråk och minustecken. Med en mer ”retorisk” eller ”verbal” förklaring av algoritmen av typen ”halva det framför x med ombytt tecken, plus/minus roten ur det talet i kvadrat och sedan konstanten med ombytt tecken” skulle detta kunna se ut som:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Halva med ombytt tecken

Byt tecken

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

I kvadrat, strunta i tecken

En sådan förklaring skulle kunna öka säkerheten hos eleven i att klara av att få ut lösningarna på ekvationen, men å andra sidan skulle den beröva elever från en möjlighet till aritmetisk övning på till exempel negativa bråkuttryck i kvadrat.

En till aritmetisk utmaning för elever kan vara omskrivningar av kvadratrötter i slutändan av typen $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Ofta uppmärksammas detta i samband med elever som inte ”får samma lösningar som facit”, men att det visar sig att de bara inte skrivit om kvadratroten till samma som facitförfattarna. Det kan därför vara viktigt att ta upp och visa detta vid något tillfälle. Här kan också diskuteras normer kring hur en ”tillräckligt förenklad kvadratrot” är.

Något som kan ses från nationella provs uppgifter på svårare nivå är att de handlar om andragradsekvationer och deras lösningar (Se HT12 nr 8, VT14 nr 17). För detta är diskriminanten (som den kallas för båda lösningsformlerna)

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (eller $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ för abc-formeln)

viktig. Att reda ut hur diskriminanten hänger samman med antalet lösningar till ekvationen kan vara viktigt att göra vid något tillfälle (*Ett förslag på hur detta kan göras ges i Aktivitet 3.*), eftersom det också bygger till andragradsfunktioner och deras grafiska utseende. Andragradsekvationer har alltid två lösningar. Ibland är båda lösningarna samma lösning, och då kallas det för en dubbellösning eller dubbelrot. Dessa händer inte så ofta, men är ett viktigt gränsfall när man tittar på diskriminanten.

Lösning med faktorisering av fullständiga andragradsekvationer

Utanför Sverige löses andragradsekvationer en del med faktorisering och då med en sorts användning av Vietas formler. Då tittar man på om en andragradsekvation skriven med koefficienten 1 framför x^2-termen, exempelvis $x^2 - 5x + 6 = 0$ så om man kan hitta två faktorer som utgör konstanten 6 som t.ex. $6 = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) = 6 \cdot 1 = (-6) \cdot (-1)$ och dessa två faktorers summa kan ge den negativa koefficienten till x-termen (i detta fall: $3 + 2 = 5, (-2) + (-3) = -5$ eller $6 + 1 = 6, (-1) + (-6) = -7$). Då kan man faktorisera $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ eftersom $x_1 + x_2 = -p$

samt $x_1 \cdot x_2 = q$ för $x^2 + px + q = 0$. Det är dock sällan som faktorer lätt kan hittas på detta sätt, om det inte är tillrättalagda uppgifter.

Grafisk eller numerisk lösning

Andragradsekvationer som har irrationella koefficienter, eller empiriska värden kan vara svåra att lösa utan numeriska hjälpmedel. Här kan de digitala hjälpmedel du som lärare använder tillsammans med klassen vara värdefulla att använda sig av.

5. Andragradsekvationer i en svensk gymnasiekontext

Här beskrivs hur andragradsekvationer som innehåll är beläget och tolkas i en svensk kontext. Detta är för matematik 2c. Viss förändring kan komma att ske av detta inför reformen GY25.

I ämnesplanen

I matematik 2 (c) beskrivs det centrala innehållet för andragradsekvationer som

- Metoder för att lösa andragradsekvationer.

Det finns dock närliggande och till viss del överlappande centralt innehåll såsom

- Begreppet andragradsfunktion och egenskaper hos andragradsfunktioner, inklusive symmetrilinje, extrempunkt och nollställen.
- Metoder för att lösa rotekvationer.

I läromedel

Det här stycket baseras på tre vanligt förekommande läromedel[3]. Där kan ses att andragradsekvationer har ett eget avsnitt som ligger efter kvadrerings- och konjugatregler, och innan andragradsfunktioner. Rotekvationer ligger i anslutning till andragradsekvationer, då dessa i många fall leder till andragradsekvationer (ex. $\sqrt{x+3} = x$ som blir $x + 3 = x^2$ efter kvadrering i båda led).

Definitionen av en andragradsekvation (i en variabel) ges av ekvationer av typen $ax^2 + bx + c = 0$, där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Med ord kan sägas en ekvation där båda sidorna av likhetstecknet (men oftast bara ena) är ett polynom av minst och högst grad 2.

Läromedel behandlar andragradsekvationer i huvudsak enligt tre typer, som kallas något olika. Här har namn satts på dem för att kunna beskriva dem:

- Enkla andragradsekvationer, $b = 0$
  - Metod för lösning genom att $x^2 = C \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{C}$ (kallas ibland kvadratrotsmetoden)
- Andragradsekvationer (som går att skriva) på faktorform, där $c = 0$, eller skrivna på typen $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
  - Metod för lösning med (faktorisering och) nollproduktsmetoden
- Fullständiga andragradsekvationer av typen $ax^2 + bx + c = 0$,
  - Metod för lösning genom kvadratkomplettering
  - Metod för lösning med lösningsformel för andragradsekvationer, $x^2 + px + q = 0$ ger lösningarna av $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, (den så kallade ”pq-formeln”).
- Vietas formler behandlas också i några av läromedlen. Dessa innebär att för en andragradsekvation av typen $ax^2 + bx + c = 0$ där lösningarna är x_1 och x_2 ges sambanden att $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ samt $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. För en andragradsekvation

[3] Liber Matematik, Matematik 5000+, samt Origo

med koefficienten 1 på kvadrattermen $x^2 + px + q = 0$ gäller då motsvarande sambanden att $x_1 + x_2 = -p$ samt $x_1 \cdot x_2 = q$.[4]

I nationella prov

Genom de frisläppta prov som går att finna från tidigare givna nationella prov i matematik 2(c) kan ses att dessa innehåller samtliga ekvationstyper givna enligt tidigare, men utan krav på typ av metod annat än att den ska vara t.ex. algebraisk. Kvadratkomplettering som metod är alltså ingenting som NP historiskt krävt i de frisläppta proven *(Se exempeluppgifter på andragradsekvationer från NP)*.

De nationella provens formelblad innehåller dessutom förutom ”pq-formeln” även ”abc-formeln”, som inte kräver koefficienten 1 framför x^2-termen. Från formelbladet[5]:

Andragradsekvationer

$x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$

OBS! När NP nu förändras både till form och genomförande kan detta också komma att ändras.

I progressionen

Andragradsekvationer kan placeras på följande sätt i svensk skolkontext. Här har också aritmetik, och förberedande algebra inklusive variabelbegreppet och ekvationsbegreppet från tidigare skolår lagts in, som dessutom tidigare forskning visat är viktiga förkunskaper.

Aritmetik
Tidigare algebra
-variabelbegreppet
-ekvationsbegreppet
Ma2: Kvadreringsregler/
konjugatregler

→

Ma2: Andragradsekvationer

→

Ma2: Rotekvationer
Ma2: Andragradsfunktioner
Ma4: Polynomekvationer av
högre grad

[4] Dessa samband används vid faktorisering av andragradspolynom av typen $ax^2 + bx + c$ där $a, b, c \neq 0$ genom att undersöka koefficienter och termer, något som är vanligare internationellt sett.

[5] https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Formelblad_matematik_2.pdf

Referenser

Barbieri, C. A., & Booth, J. L. (2020). Mistakes on Display: Incorrect Examples Refine Equation Solving and Algebraic Feature Knowledge. *Applied Cognitive Psychology*, *34*(4), 862-878.

Baybayon, G. G., & Lapinid, M. R. C. (2024). Students' Common Errors in Quadratic Equations: Towards Improved Mathematics Performance. *Infinity Journal*, *13*(1), 83-98.

Bosse, M. J., & Nandakumar, N. R. (2005). The Factorability of Quadratics: Motivation for More Techniques. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, *24*(4), 143-153.

Didis, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(4), 1137-1150.

Herawaty, D., Widada, W., Gede, W., Lusiana, D., Pusvita, Y., Widiarti, Y., & Anggoro, A. F. D. (2021). The Cognitive Process of Students Understanding Quadratic Equations. *Journal of Physics: Conference Series, 1731*(1), 12-53.

Kabar, M. G. D. (2018). Secondary School Students' Conception of Quadratic Equations with One Unknown. *International Journal for Mathematics Teaching and* Learning, *19*(1), 112-129.

López, J., Robles, I., & Martínez-Planell, R. (2016). Students' Understanding of Quadratic Equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(4), 552-572.

Makgakga, T.P. (2023). Exploring the Insights into Grade 11 Learners' Understanding of the "Roots" of Quadratic Equations. *Universal Journal of Educational Research, 2*(4), 358-376.

Memnun, D. S., Aydin, B., Dinç, E., Çoban, M., & Sevindik, F. (2015). Failures and Inabilities of High School Students about Quadratic Equations and Functions. *Journal of Education and Training Studies*, *3*(6), 50-60.

O'Connor, B. R. (2022). Improving Student Proficiency in Solving Quadratic Equations. *Australian Mathematics Education Journal, 4*(2), 29-38.

Olteanu, C. (2007). *"Vad skulle x kunna vara?" : andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande* (Publication Number 1653-6894) [Doctoral thesis, monograph, Högskolan Kristianstad, Institutionen för beteendevetenskap]. DiVA. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-1363

Olteanu, C., & Holmqvist, M. (2012). Differences in Success in Solving Second-Degree Equations Due to Differences in Classroom Instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(5), 575-587.

Tall, D., de Lima, R. N., & Healy, L. (2014). Evolving a Three-world Framework for Solving Algebraic Equations in the Light of What a Student Has Met Before. *The Journal of Mathematical Behavior*, *34*, 1-13.

Vaiyavutjamai, P., Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). Students' Attempts to Solve Two Elementary Quadratic Equations: A Study in Three Nations. In P. C. Clarkson (Ed.) *Building connections: Theory, research and practice: Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Sydney: MERGA

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of Classroom Instruction on Students' Understanding of Quadratic Equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47-77.

Zakaria, E., & Maat, S. M. (2010). Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations. *International Education Studies, 3*(3), 105-110.

[1] (Didis & Erbas, 2015)
[2] (Olteanu & Holmqvist, 2012)
[3] (Tall et al., 2014)
[4] (Didis & Erbas, 2015)
[5] (López et al., 2016)
[6] (López et al., 2016)
[7] (Kabar, 2018)
[8] (Kabar, 2018)
[9] (Vaiyavutjamai & Clements, 2006).
[10] (Olteanu, 2007)
[11] (O'Connor, 2022)
[12] (Vaiyavutjamai et al., 2005)
[13] (Vaiyavutjamai & Clements, 2006).
[14] (Makgakga, 2023)
[15] (O'connor, 2022)
[16] (Makgagka, 2023)
[17] (Baybayon & Lapinid, 2024)
[18] (Zakaria & Maat, 2010)
[19] (Olteanu, 2007; Olteanu & Holmqvist, 2012)
[20] (Kabar, 2018)
[21] (López et al., 2016).
[22] (Bosse & Nandakumar, 2005).
[23] (Barbieri & Booth, 2020)
[24] (Herawaty et al., 2021)
[25] (Kabar, 2018; López et al., 2016; Memnun et al., 2015)
[26] (Didis & Erbas, 2015)

Bilaga 1 – Förslag till lektionsaktiviteter

Detta är bilaga 1 till ”Lärarguide för planering av undervisning av andragradsekvationer”

Förslagen på genomförande av lektionsaktiviteter som beskrivs här är förslag. Alla aktiviteter är designade för att hantera sådant som behandlats i lärarguiden. Några har tidigare använts av lärare, och kommentarer kring detta finns i anslutning till aktiviteten. Du väljer själv om du vill genomföra någonting och hur du i sådana fall anpassar aktiviteten på ett sätt som du bedömer blir bäst. Det finns beskrivningar vad varje aktivitet är tänkt att åstadkomma.

Även om aktiviteterna här presenteras i en ordning finns det inget som säger att de inte skulle kunna genomföras i en annan ordning. Det finns fler aktiviteter här (ca 5h lektionstid) än vad du kanske har till förfogande att lägga på området andragradsekvationer.

Innehåll i denna bilaga:

Aktivitet 1 – Introduktion av andragradsekvationer

En möjlig introduktionsaktivitet. Syftet är att eleverna ska få öva på att skilja ut en andragradsekvation från övriga matematiska objekt såsom förstagradsekvationer, andragradsuttryck eller första- eller andragradsfunktioner. Genom aktiviteten visas möjligheter att koefficienterna inte alltid måste vara hela tal, utan även rationella tal skrivna både i decimal och bråkform, samt irrationella tal.

Aktivitet 2 – Identifiera typer av andragradsekvationer och lös tillsammans

En möjlig aktivitet med syfte att eleverna själva ska öka sin säkerhet genom att öva på att lösa andragradsekvationer. En variant från individuellt arbete i läroboken där elever samtidigt kan ta hjälp av varandra.

Aktivitet 3 – Diskriminanten

En möjlig aktivitet med syfte att introducera diskriminanten och dess betydelse för antalet lösningar till en andragradsekvation. Elever är delaktiga i aktiviteten med att upptäcka och avgöra om andragradsekvationer har (reella) lösningar eller inte.

Aktivitet 4 – Olika lösningsmetoder

En möjlig aktivitet med syftet att elever ska lära sig känna igen de olika typer eller utseenden av andragradsekvationer, och konsekvenser för vilka lösningsmetoder som då är möjliga och vilka som är effektiva.

Aktivitet 5 – Identifiera och rätta till vanliga misstag

En möjlig aktivitet med syftet att förebygga vanliga misstag. I aktiviteten får elever undersöka och upptäcka vanliga misstag i elevlösningar, samt rätta till dem.

Aktivitet 1 – Introduktion av andragradsekvationer (ca 30+30 minuter) Lärarinformation

Den här aktiviteten syftar till att låta elever kontrastera och urskilja viktiga egenskaper eller aspekter av andragradsekvationer, samt att inse på vilka sätt de skiljer sig från och på vilka sätt de liknar andra matematiska objekt. Aktiviteten ger också möjlighet att låta alla typer av elever få bidra med det de kan inom sina grupper och senare i helklass. Aktiviteten består av två delar, där det går att genomföra bara en av dem om tiden är begränsad.

Genom aktiviteten är det tänkt att eleverna ska få möjlighet att öva sig på att

- Del1: känna igen olika typer av andragradsekvationer och kunna särskilja dem från
    - Uttryck
    - Förstagradsekvationer och -funktioner
    - Andragradsfunktioner
- Del 2: Kunna skriva om andragradsekvationer till ekvivalent standardform
- Del 2: Känna till att det finns (i huvudsak, eller minst) tre olika typer av andragradsekvationer
- Kommunicera matematik med varandra

Lärare som tidigare använt den här aktiviteten i klassrum har genomfört den som den är, eller modifierat den för att passa dem, till exempel genom att ta bort några ekvationer, eller bara köra del 1. Detta för att passa begränsningar med tillgänglig lektionstid. Någon har delat upp den och kört del 1 på en lektion och fortsatt med del 2 på nästa lektion.

Förslag på genomförande:

Del 1 – sortera och gruppera

Berätta för eleverna att de sett många olika typer av matematiska objekt hittills. Om de inte sett innan, ge en introduktion av vad andragradsekvation är. Som förslag kan ges att berätta att

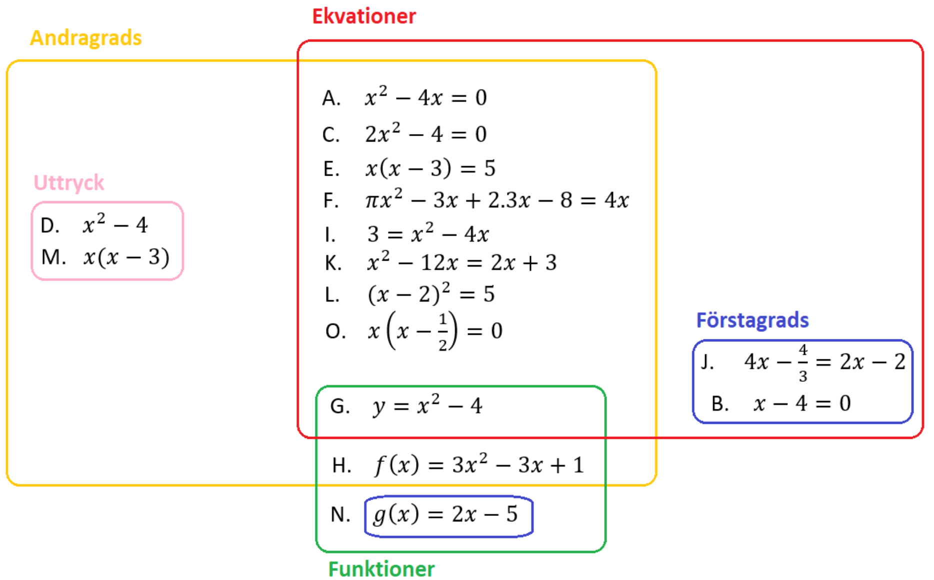
- Det ska vara en ekvation som består av polynom av precis grad 2
- Det ska gå att skriva som bara polynom på varje sida

Visa följande matematiska objekt (som skulle kunna kallas matematiska *saker* eller grejor, eller liknande) på tavlan, på ett utskrivet dokument, eller på ett elektroniskt dokument (se Elevinformation efter lärarinformation i det här dokumentet). På ett utskrivet papper kan de klippa isär ekvationerna, som kan göra grupperingen av dem lättare, om de kan flyttas runt fysiskt. Anledningen till att kalla dem för saker eller grejor är att de alla heter olika, och det inte finns något bra samlingsnamn. Man kan inte kalla alla för uttryck, eftersom inte alla *är* uttryck, även om de alla *består av* uttryck på ett eller annat sätt. Att använda ”saker” eller ”grejor”, eller ”objekt” om man vill vara mer formell, är därför ett sätt att kunna prata om dem alla som en samling utan att förvilla.

A. $x^2 - 4x = 0$
B. $x - 4 = 0$
C. $2x^2 - 4 = 0$
D. $x^2 - 4$
E. $x(x-3) = 5$
F. $\pi x^2 - 3x + 2.3x - 8 = 4x$
G. $y = x^2 - 4$
H. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
I. $3 = x^2 - 4x$
J. $4x - \frac{4}{3} = 2x - 2$
K. $x^2 - 12x = 2x + 3$
L. $(x-2)^2 = 5$
M. $x(x-3)$
N. $g(x) = 2x - 5$
O. $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Be eleverna försöka förklara vilka av sakerna du skrivit upp (eller delat ut) som de tror är andragradsekvationer, och vad som inte är det. Instruera dem att sortera dem på något sätt, och se om de även kan sortera sådant som inte är andragradsekvationer. Låt eleverna arbeta i par i ca 10-15 minuter. (Vill du hellre köra EPA, eller i större grupper på en gång, eller liknande, så gör det.)

Hantera elevernas förlag på grupperingar. Du kanske märker när du går runt bland elever några olika typer av grupperingar. Välj ut några elevers grupperingar och visa på tavlan (eller låt dem). En möjlig utförlig gruppering skulle kunna vara



Du kan antingen använda den som en summering, eller att ni kommer på egna grupperingar. Det kan räcka att bara skilja på ekvationer, funktioner, och uttryck till exempel, eller att bara välja ut andragradsekvationerna och låta de andra vara ”resten”. Du kan också efter att ni gått igenom några möjliga grupperingar visa den föreslagna grupperingen utan rubriker och låta eleverna själva gissa vad färgerna skulle kunna stå för (se Elevinformation 2). Visa på projektor eller dela ut kopior.

Poänger du som lärare vill få fram här när du sammanfattar och diskuterar i helklass (så att eleverna har möjlighet att få syn på dem) är:

- Inte allt skrivet med x^2 i sig är andragrads***ekvationer***
- Inte alla andragradsekvationer har konstanttermer
- Inte alla andragradsekvationer har linjära variabeltermer (ex. 3x)
- Inte alla koefficienter är heltal (de kan också vara decimaltal, bråk, eller irrationella t.ex. π)
- Inte alla andragradsekvationer har termerna på vänster sida av likhetstecknet
- Inte alla andragradsekvationer har upphöjt i två, eftersom en del också kan vara faktoriserade som E eller O, eller i ett binom som L.
- Andragrads***ekvationer*** och andragrads***funktioner*** är två olika saker
- Andragrads***ekvationer består av*** andragrads***uttryck*, **men har också en **likhet**
- G. är speciell, eftersom den ibland kallas för en andragradsfunktion, och ibland en ekvation i två variabler.

Del 2 – skriv om till ekvivalenta andragradsekvationer

Nu är det dags för andra delen som syftar till att kunna skriva om ekvationer till ekvivalenta ekvationer på annan form, som är en viktig del för att kunna lösa andragradsekvationer (och andra typer av ekvationer).

Ta därför fram alla andragradsekvationer. Antingen markera dem lite extra på tavlan, eller ta bort de andra. Beskriv nu att andragradsekvationer kan beskrivas på formen $ax^2 + bx + c = 0$ och be eleverna att skriva om dem. Be dem alltså att skriva så att höger led är lika med noll. Du kan kanske behöva visa något exempel, beroende på hur du känner din klass.

Här är hur det kommer att bli:

A: $x^2 - 4x = 0$ är redan klar

C: $2x^2 - 4 = 0$ är redan klar

E: $x(x-3) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5 = 0$

F: $\pi x^2 - 3x + 2.3x - 8 = 4x \Leftrightarrow \pi x^2 - 0.7x - 8 = 4x \Leftrightarrow \pi x^2 - 4.7x - 8 = 0$

I: $3 = x^2 - 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$

K: $x^2 - 12x = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 14x - 3 = 0$

Nu är det lite speciellt, eftersom de två sista ekvationerna vill man egentligen inte utveckla för att lösa dem, men för den här övningen gör vi det för att se att de går att skriva om på samma form. Det är värt att diskutera det med eleverna. Passa också på att diskutera att $\frac{x}{2}$ är samma som $\frac{1}{2}x$.

L: $(x-2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 9 = 0$

O: $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{2} = 0$

Avsluta aktiviteten genom att sortera ekvationerna i tre olika typer, och berätta att ni kommer lösa de olika typerna nästa gång (som en ”cliffhanger”). Förslag på grupper är: Grupp 1: C, L, Grupp 2: A, O, och Grupp 3: E, F, I, K, L. Kommentera att L kan hamna i både Grupp 1 och 3. Skriv gärna i några fler enkla, som $x^2 = 16$, $(x-3)(x+5) = 0$ och $x^2 - 4x - 5 = 0$. Be eleverna skriva någon mer av enkel, faktorform, eller fullständig.

Här är ett förslag på hur det skulle kunna se ut:

Enkla	**Faktorform**	**Fullständiga**
C. $2x^2 - 4 = 0$	A. $x^2 - 4x = 0$	E. $x(x-3) = 5$
L. $(x-2)^2 = 5$	O. $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$	F. $\pi x^2 - 3x + 2.3x - 8 = 4x$
		I. $3 = x^2 - 4x$
		K. $x^2 - 12x = 2x + 3$
		L. $(x-2)^2 = 5$

Rubrikerna kan du ändra eller diskutera vad de borde heta. Förklara om de olika typerna och koppla till formen $ax^2 + bx + c = 0$ och vad koefficienterna skulle vara i varje situation.

Aktivitet 1 (Elevinformation)

Försök välja ut vilka av dessa som du tror är andragradsekvationer. Försök också sortera ut de som inte är andragradsekvationer och gruppera dem på något sätt som du tycker är vettigt.

A. $x^2 - 4x = 0$
B. $x - 4 = 0$
C. $2x^2 - 4 = 0$
D. $x^2 - 4$
E. $x(x - 3) = 5$
F. $\pi x^2 - 3x + 2.3x - 8 = 4x$
G. $y = x^2 - 4$
H. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
I. $3 = x^2 - 4x$
J. $4x - \frac{4}{3} = 2x - 2$
K. $x^2 - 12x = 2x + 3$
L. $(x - 2)^2 = 5$
M. $x(x - 3)$
N. $g(x) = 2x - 5$
O. $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Aktivitet 1 (Elevinformation 2)

Någon har gjort de här grupperna och ringat in med olika färg. Vad tror ni de olika färgerna betyder? Vad har allt som är innanför en viss inringning för egenskaper? Varför då?

Hur skiljer sig den här grupperingen från er gruppering? Vad har ni grupperat liknande?

A. $x^2 - 4x = 0$

C. $2x^2 - 4 = 0$

E. $x(x-3) = 5$

F. $\pi x^2 - 3x + 2.3x - 8 = 4x$

I. $3 = x^2 - 4x$

K. $x^2 - 12x = 2x + 3$

L. $(x-2)^2 = 5$

O. $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

D. $x^2 - 4$

M. $x(x-3)$

J. $4x - \frac{4}{3} = 2x - 2$

B. $x - 4 = 0$

G. $y = x^2 - 4$

H. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$

N. $g(x) = 2x - 5$

Aktivitet 2 – Identifiera typer av ekvationer och lös tillsammans (ca 30-60 minuter, eller valfri omfattning) Lärarinformation

När elever har fått reda på att det finns tre olika sorters andragradsekvationer, och att dessa bara beror på förekomsten av x^2-term, samt om det finns med x-term eller inte, samt om det finns med konstantterm eller inte, kan du använda eleverna som resurser för varandra. En fördel med detta är att du som lärare inte behöver hjälpa lika många och att de får öva på att diskutera och motivera för varandra.

Övningen syftar till att stötta eleverna i att hitta strategier för hur de kan analysera vilken typ av ekvation de har att göra med och hur de i sådana fall ska ta sig an den. Den syftar också till att elever får öva säkerheten på att lösa ekvationerna också.

Genom aktiviteten är det tänkt att eleverna ska få möjlighet att öva sig på att

- Känna igen olika typer av andragradsekvationer
- Välja lämplig lösningsmetod för en andragradsekvation
- Kommunicera matematik med varandra

När lärare använt denna aktivitet i klassrummet har de beskrivit att de kört den som den är, eller modifierat den genom att lägga till eller ta bort ekvationer från listan. På så sätt har aktiviteten tagit mindre tid att genomföra, som har passat bättre för dem med begränsad lektionstid. En annan möjlig modifiering är att ta bort uppgifter med ekvationer av en viss typ som inte hunnits behandlas i undervisningen ännu.

Förslag på genomförande:

Låt eleverna arbeta i par tillsammans (som du ordnar själv eller som de sitter, organisera som du vill). Välj ut ett gäng blandade andragradsekvationer, antingen från din elevlärobok, eller från annan uppgiftsbank, eller skapa dem själv. Skriv på tavlan, eller dela ut ett papper med följande instruktion till eleverna:

”För varje ekvation ni stöter på:

1. Titta på ekvationen. Diskutera vilken typ av andragradsekvation det är. Försök sedan välja ut en idé om hur den ska lösas.
2. Lös ekvationen enligt er idé. Försök själva först och jämför era lösningar med varandra. Gå sedan vidare till nästa ekvation och gå till första punkten.”

En fördel med att välja ut dem från din elevlärobok är att eleverna då kan känna att de gör de uppgifter de ”ska göra” från boken, så att de inte behöver protestera eller dubbelarbeta. Ett förslag på blandade ekvationer finns annars på nästa sida.

Det skulle kunna gå att ha lathunden som stöd, eller motsvarande egenskapad hjälp, om det bedöms behövas.

Aktivitet 2 (Elevinformation)

Här kommer flera andragradsekvationer. För varje ekvation:

1. Titta på ekvationen. Diskutera vilken typ av andragradsekvation det är. Försök sedan välja ut en idé om hur den ska lösas.
2. Lös ekvationen enligt er idé. Försök själva först och jämför era lösningar med varandra. Gå sedan vidare till nästa ekvation och gå till första punkten.

Ekvationer

A) $x^2 + 3x = 0$
B) $x^2 - 16 = 0$
C) $x^2 + 4x - 5 = 0$
D) $x^2 = 6x$
E) $x(x - 3) = 0$
F) $x^2 = 8x - 7$
G) $(x - 2)^2 = 4$
H) $x^2 + 3x = 0$
I) $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{3}{16}$

Aktivitet 3 – Diskriminanten (ca 30-60 minuter) Lärarinformation

Är tänkt som en övning för att kunna upptäcka och avgöra om andragradsekvationer har (reella) lösningar eller inte. Denna behöver göras efter att eleverna har blivit bekanta med lösningsformeln eller kan kvadratkomplettera. Du kan ha diskuterat och gett namn till diskriminanten tidigare, och då blir den här övningen som en repetition, eller så används den här aktiviteten för att introducera idén om diskriminant. Denna är gjord för diskriminanten enligt pq-formeln men kan anpassas till abc.

Genom aktiviteten är det tänkt att eleverna ska få möjlighet att öva sig på att

- Avgöra antalet lösningar till en andragradsekvation genom att undersöka diskriminanten

Förslag på genomförande:

Be eleverna fundera på om de kan föreslå en andragradsekvation som saknar (reella) lösningar. Låt dem fundera tillsammans. Samla de olika förslagen. Förmodligen kommer du få någon variant på $x^2 + 4 = 0$ eller skriven som $x^2 = -4$. Du kommer inte få någon $x^2 + 4x = 0$, eftersom alla andragradsekvationer med konstantterm 0 faktiskt har reella lösningar (som kan vara något någon försöka bevisa, eller i alla fall förklara).

Förutsätt att någon eller några kommer kunna föreslå någon av dessa av dessa med x^2-term och konstantterm skild från noll. Samla ihop dem och se om ni kan hitta någon regel tillsammans, låt eleverna få försöka formulera till exempel som att ” $x^2 + c = 0$ saknar lösningar om c är större än noll”.

Ställ nästa fråga, om de kan skapa en andragradsekvation på formen $x^2 + px + q = 0$ som saknar lösningar, om p också kan vara något annat än noll. Om de kör fast, ge en ledtråd att be dem testa med följande:

$x^2 - 8x + 4 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x^2 - 8x + 19 = 0$

$x^2 + 8x + 4 = 0$

$x^2 + 8x + 12 = 0$

$x^2 + 8x + 19 = 0$

Meningen med dessa ledtrådar är att eleverna i de tre första ser strukturerat hur konstanttermens ökande värde till slut gör diskriminanten negativ. De sista tre ledtrådarna visar att tecknet på koefficienten till x-termen inte spelar någon roll, utan bara storleken.

Förhoppningsvis kan ni tillsammans komma fram till att diskriminanten

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ (eller } \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ för abc-formeln)}$$

bestämmer antalet lösningar. Sammanfatta att

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} > 0$ ger två reella lösningar

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$ ger en dubbelrot, d.v.s. två reella lösningar som är ”samma lösning”

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} > 0$ ger inga (reella) lösningar

Aktivitet 4 – Andragradsekvationers olika utseenden och lösningar (ca 60 minuter) Lärarinformation

Syftet med den här aktiviteten är att elever ska lära sig känna igen olika typer eller utseenden av andragradsekvationer, och konsekvenser för vilka lösningsmetoder som då är möjliga och vilka som är effektiva. Genom att i aktiviteten gruppera på olika sätt läggs fokus på att försöka uppmärksamma likheter och skillnader, både i utseende på andragradsekvationer och på lösningsmetoder. Aktiviteten kan fungera som ett sätt att samla ihop flera olika typer av lösningsmetoder som eleverna har lärt sig. Den är också inspirerad av en lektionsdesign från Underground Mathematics.

Genom aktiviteten är det tänkt att eleverna ska få möjlighet att öva sig på att

- Identifiera viktiga aspekter av olika typer av andragradsekvationer
- Avgöra vilka lösningsmetoder som är mest effektiva för olika typer av andragradsekvationer
- Undersöka lösningarna till andragradsekvationer.

Förslag på genomförande:

Be eleverna gruppera följande andragradsekvationer efter vilken lösningsmetod som skulle vara mest effektiv för att lösa den. Om du vill ha mer öppenhet, låt istället eleverna bara gruppera dem på det sätt de tycker passar. Justera i sådana fall elevinformationen till att bara be dem gruppera dem.

(Använd i sådana fall en fråga om ”Hur skulle du lösa dem?” till elevgrupper som kört fast, när du går runt och ser hur det går för grupperna. Om någon grupp blir ”klar” kan du ställa en fråga av typen ”Hur är det med antalet lösningar till ekvationerna?”. Denna fråga hör också samman med diskriminant-aktiviteten.)

Dela ut ekvationerna på ett papper (Elevinformation), och om du har möjlighet låt eleverna klippa isär dem. Detta kan göra att grupperingen av ekvationerna kan ske lättare, om de kan flyttas runt fysiskt.

Låt eleverna arbeta med dessa i par eller grupp. När de flesta grupperna kommit fram till någon sorts gruppering, avbryt eleverna och diskutera några av elevernas grupperingar som du tycker passar i helklass.

Dela sedan ut förslag på gruppering (Elevinformation 2), eller visa den på projektor eller liknande. Där finns en gruppering utan namn på grupperna, där eleverna själva får försöka lista ut på vilka grunder den grupperingen gjorts. Låt dem arbeta med det en stund och samla sedan ihop med en helklassdiskussion. Förslagsvis tar du upp i helklassdiskussionen

- Vad de olika färgerna står för (Förslag på gruppering med beskrivning på nästa sida)
- Vad eleverna hade för skillnader och likheter från den här grupperingen i hur de grupperade.
    - Kanske gruppering efter typ, om det finns a, b och c i $ax^2 + bx + c = 0$ istället? Vad händer då med en sådan som till exempel R. ?
- Fråga: Finns det några ekvationer som behöver diskuteras placeringen av lite extra?
- Fråga: Finns det någon lösningsmetod som fungerar på alla ekvationer?
    - T.ex. lösningsformeln fungerar på alla, men ofta inte effektivt
- Vilka ekvationer skulle kunna lösas på andra sätt?
    - T.ex. P. med konjugatregeln
- Hur kan man veta om det finns lösningar eller inte (eller dubbelrötter)?

En möjlig gruppuppdelning är denna:

Löses med nollprodukt

Behöver faktoriseras först

C. $x^2 = 14x$

D. $2x^2 - 7x = 0$

J. $x^2 + x = 0$

M. $x^2 + 9x = 0$

E. $(x-4)(x+3) = 0$

K. $x(2x+3) = 0$

O. $(2-x)(x+0{,}1) = 0$

Löses med kvadratrot

F. $x^2 = 25$

R. $(x+1)^2 = 4$

Har dubbelrot

N. $x^2 = 0$

Behöver omformas först

P. $x^2 - 16 = 0$

Q. $2x^2 - 128 = 0$

G. $2(x-0{,}4)^2 - 18 = 0$

H. $x^2 + 16 = 0$

Löses med lösningsformel eller kvadratkomplettering

B. $3x^2 - 6x + 3 = 0$

I. $2x^2 + 4x = 6$

A. $x^2 - 4x - 5 = 0$

Saknar (reella) lösningar

L. $x^2 + 4x + 5 = 0$

Aktivitet 4 (Elevinformation)

Dela in de här andragradsekvationerna i grupper efter hur ni skulle lösa dem. Hur är det med antalet lösningar till ekvationerna? Finns det några ekvationer som hör ihop med mer än en grupp?

A. $x^2 - 4x - 5 = 0$

B. $3x^2 - 6x + 3 = 0$

C. $x^2 = 14x$

D. $2x^2 - 7x = 0$

E. $(x - 4)(x + 3) = 0$

F. $x^2 = 25$

G. $2(x - 0{,}4)^2 - 18 = 0$

H. $x^2 + 16 = 0$

I. $2x^2 + 4x = 6$

J. $x^2 + x = 0$

K. $x(2x + 3) = 0$

L. $x^2 + 4x + 5 = 0$

M. $x^2 + 9x = 0$

N. $x^2 = 0$

O. $(2 - x)(x + 0{,}1) = 0$

P. $x^2 - 16 = 0$

Q. $2x^2 - 128 = 0$

R. $(x + 1)^2 = 4$

Aktivitet (Elevinformation 2)

Någon har gjort de här grupperna av ekvationerna och ringat in med olika färg. Ni kan se att en del ekvationer finns i flera grupper.

- Vad tror ni de olika färgerna betyder? Vad gäller för allt som är innanför en viss färg? Varför då?
- Hur skiljer sig den här grupperingen från er gruppering? Vad har ni grupperat liknande?

C. $x^2 = 14x$

D. $2x^2 - 7x = 0$

J. $x^2 + x = 0$

M. $x^2 + 9x = 0$

E. $(x - 4)(x + 3) = 0$

K. $x(2x + 3) = 0$

O. $(2 - x)(x + 0{,}1) = 0$

F. $x^2 = 25$

R. $(x + 1)^2 = 4$

N. $x^2 = 0$

B. $3x^2 - 6x + 3 = 0$

I. $2x^2 + 4x = 6$

P. $x^2 - 16 = 0$

Q. $2x^2 - 128 = 0$

G. $2(x - 0{,}4)^2 - 18 = 0$

A. $x^2 - 4x - 5 = 0$

H. $x^2 + 16 = 0$

L. $x^2 + 4x + 5 = 0$

Aktivitet 5 – Identifiera och rätta till vanliga misstag (ca 45-60 minuter) Lärarinformation

Den här aktiviteten handlar om att låta elever undersöka lösningar och upptäcka vanliga misstag vid lösning av andragradsekvationer, samt att rätta till dem. Att använda felaktigt lösa uppgifter var något som visade sig från tidigare forskning ha potential att leda till bättre förmåga att lösa ekvationer hos elever.

Genom aktiviteten är det tänkt att eleverna ska få möjlighet att öva sig på att

- Lösa andragradsekvationer
- Fundera på hur någon annan kan ha tänkt i lösningar, och kunna motivera varför något stämmer eller inte stämmer
- Kommunicera matematik med varandra

Förslag på genomförande:

Berätta för eleverna att de ska få arbeta med att undersöka elevlösningar av uppgifter, där eleverna gjort något misstag i varje uppgift eller använt någon ineffektiv metod. Det är deras uppgift att försöka hitta misstagen och rätta till dem och fundera över om det finns något bättre sätt att lösa uppgiften på.

Dela ut lösningarna (Elevinformation) till eleverna på valfritt sätt (t.ex. utskrivna eller via något digitalt sätt som du är van vid). Be eleverna försöka hitta misstagen och lösa dem istället på ett sätt som stämmer. Låt eleverna arbeta i par i ca 15-30 minuter. (Vill du hellre köra EPA, eller liknande, så gör det.) Se över om du vill justera namnen på de fiktiva eleverna som gjort lösningarna.

När du samlar ihop i helklassdiskussion och går igenom lösningarna och deras misstag är det viktigt att du lyfter viktiga poänger. Kanske vill du dela upp det i två delar, så att du tar ett avbrott efter ca 20 minuter, där ni pratar igenom uppgift 1-6. Sedan kan eleverna arbeta med resten av uppgifterna och så pratar ni igenom uppgift 7- i slutet.

Här kommer nu alla lösningar till uppgifterna, som är samma uppgifter och ordning som i Elevinformationen. Viktiga poänger att lyfta i helklassdiskussion står som punkt efter varje uppgift.

1. Ella ska lösa ekvationen $x^2 = 8x$. Lösningen ser ut såhär:

$$x^2 = 8x$$

$$\frac{x^2}{x} = \frac{8x}{x}$$

$$x = 8$$

Vad gör Ella för misstag? Kan du hjälpa Ella genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

- Ella dividerar bort lösning, missar att det är två lösningar till en andragradsekvation. Viktigt att inte dividera med en variabel, när variabeln skulle kunna ha värdet noll. I detta fall är det också så att den lösning som försvinner är $x = 0$. Därför är det division med noll som utförs, som inte är giltigt.
- Flytta till att högerledet = 0, och sedan faktorisera, samt använda nollprodukt. Ekvationen $x^2 = 8x$ ger $x^2 - 8x = 0$ som efter faktorisering ger $x(x - 8) = 0$ som med nollprodukt ger lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = 8$.

Nollprodukt, bortser från att högerledet måste vara noll

2. William ska lösa ekvationen $x^2 - 12x = 28$. Lösningen ser ut såhär:

$$x^2 - 12x = 28$$

$$x(x - 12) = 28$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ och } x_2 = 12$$

Vad gör William för misstag? Kan du hjälpa William genom att förklara vad misstaget är och ge ett förlag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

- William faktoriserar visserligen korrekt, men för att nollproduktsmetoden/egenskapen ska fungera måste HL =0. Just nu är det ju egentligen ”28-produktsmetoden” som skulle behövas göras, d.v.s. två faktorer som tillsammans ger produkten 28. Här kan vara bra för att visa skillnaden genom att skriva och jämföra ekvationerna $x(x-12) = 28$ med $x(x-12) = 0$, för att en elev ska urskilja det viktiga med högerledet lika med noll.
- Utveckla parenteserna, flytta allt till VL så att HL= 0, och sedan lösa med lösningsformel eller kvadratkomplettering. Detta ger lösningarna $x_1 = -2$ och $x_2 = 14$.

Korrekta lösningar, men metoder går att diskutera effektiviteten på

3. Andragradsekvationen $x^2 - 16 = 0$ är given. Melvin, Linnea, och Theo ska lösa den, och gör på tre olika sätt.

Melvin:	Linnea:	Theo:
$x^2 - 16 = 0$	$x^2 - 16 = 0$	$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$	$(x+4)(x-4) = 0$	$x = -0 \pm \sqrt{0^2 + 16}$
$x = \pm 4$	$x_1 = -4$ och $x_2 = 4$	$x = -0 \pm \sqrt{16}$
		$x = -0 \pm 4$
		$x_1 = -0 + 4 = 4$
		$x_2 = -0 - 4 = -4$

Vad säger du om lösningarna? Vilken lösning är lämpligast? Vad kan vara anledningen till att Melvin, Linnea och Theo väljer just sitt sätt att lösa uppgiften på?

- Melvins lösning är snabb och effektiv, men han behöver göra en extra operation att flytta över 16.
- Linneas lösning är snygg och snabb, även om den är ovanlig. Som Linnea gör där går det alltid att göra, så slipper man ”roten ur” på båda sidorna, och använder nollprodukt istället
- Theos lösning ger korrekta lösningar, men är omständlig. Rekommenderas inte, eftersom den tar tid och lätt att göra fel på vägen. (Här skulle det dock kunna diskuteras om det är så att en del elever egentligen bara behöver kunna köra lösningsformeln på allt. Det är dock en större diskussion, som du får balansera som du vill.)

Missar en lösning

4. Elias ska lösa ekvationen $x^2 = 144$. Lösningen ser ut såhär:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$

Vad gör Elias för misstag? Kan du hjälpa Elias genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

- En andragradsekvation har två lösningar, och här finns bara en. Högerledet här är korrekt. Vänsterledet är det som enligt definitionen inte stämmer, eftersom $\sqrt{x^2} = |x|$. Detta gör att ett mellanled borde vara $|x| = 12$, som sedan ger lösningarna $x_1 = -12$ och $x_2 = 12$. Dock tas inte detta absolutbelopp upp oftast förrän i Ma3c. Du får avväga hur du vill göra med detta, om du går direkt på att ursprungliga ekvationen bara har lösningarna $\pm\sqrt{144}$ istället eller inte. Viktigt är att poängtera att det inte är $\sqrt{144}$ som är ± 12.

Nollprodukt, missar att lösningen är när parenteser är noll, inte bara avläsning

5. Julia ska lösa ekvationen $(x + 6)(x - 2) = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 6 \text{ och } x_2 = -2$$

Vad gör Julia för misstag? Kan du hjälpa Julia genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

- Misstaget är att $x_1 = 6$ och $x_2 = -2$ inte ger 0 i VL. Sätter man in $x = 6$ får man $12 \cdot 4 = 36$, som inte är 0.
- Lösa genom att sätta in $x_1 = -6$ och $x_2 = 2$ istället.
- Viktigt att inte utveckla parentesen och köra lösningsformel. Nollprodukt är en viktig egenskap som är hjälpsam och effektiv.
- Viktigt här att poängtera att det är inte så att man sätter in 6 och 2 ”samtidigt”, utan var och en för sig. Alltså lösningarna är $x_1 = -6$ och $x_2 = 2$ eftersom $(-6 + 6)(-6 - 2) = 0$ och $(2 + 6)(2 - 2) = 0$ och inte för att $(-6 + 6)(2 - 2) = 0$.

Nollprodukt, variabelförståelse, x har olika värde i olika parenteser

6. Hugo ska förklara varför ekvationen $(x - 2)(x - 5) = 0$ har lösningarna $x_1 = 2$ och $x_2 = 5$. Förklaringen låter såhär: ”Lösningarna är $x_1 = 2$ och $x_2 = 5$ eftersom $(2 - 2)(5 - 5) = 0$”

Vad säger du om Hugos förklaring? Hur skulle din förklaring se ut?

- Som föregående fråga: Det är inte så att man sätter in 6 och 2 ”samtidigt”, utan var och en för sig. Alltså lösningarna är $x_1 = 2$ och $x_2 = 5$ eftersom $(2 - 2)(2 - 5) = 0$ och $(5 - 2)(5 - 5) = 0$ och inte för att $(2 - 2)(5 - 5) = 0$.

Aritmetisk problematik med faktorisering, korrekt nollprodukt i övrigt

7. Norah ska lösa ekvationen $3x^2 = 6x$. Lösningen ser ut såhär:

$$3x^2 = 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ och } x_2 = \frac{2}{3}$$

Vad gör Norah för misstag? Kan du hjälpa Norah genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

- Misstaget i tredje raden, när $3x^2$ blir $3x \cdot 3x = 9x^2$. Detta går att undvika om man test-multiplicerar in efter att man faktoriserat, för att se att man får samma som man utgick ifrån. Parentesen ska alltså vara $(x - 2)$ som ger att $x_2 = 2$ istället.

Aritmetisk problematik med faktorisering, korrekt nollprodukt i övrigt

8. Muhamed ska lösa ekvationen $4x^2 - 9 = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(4x + 3)(4x - 3) = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{4} \text{ och } x_2 = \frac{3}{4}$$

Vad gör Muhamed för misstag? Kan du hjälpa Muhamed genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

- Misstaget i andra raden, när $4x^2$ blir $4x \cdot 4x = 16x^2$. Detta går att undvika om man test-använder konjugatregeln efter att man faktoriserat, för att se att man får samma som man utgick ifrån. Det kan också vara viktigt att poängtera här att göra $4x^2$ till $(2x)^2$ i ett mellansteg. Parentesen ska alltså vara $(2x + 3)(2x - 3)$ som ger att $x_1 = \frac{3}{2}$ och $x_2 = -\frac{3}{2}$ istället.

Sätter in andragradsekvationen fel, läser av koefficienten fel

9. Liam ska lösa ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$$

$$x_1 = -5 \text{ och } x_2 = 1$$

Vad gör Liam för misstag? Kan du hjälpa Liam genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

- Misstag med att det inte ska vara minus framför 2:an i HL i första raden vid lösningsformeln. Det kan vara bra att poängtera att det kan vara svårt att undvika den här sortens misstag, som kan vara på grund av slarv, eller att algoritmen inte har satt sig. Viktigt att hitta ett sätt som är säkert för sig själv, eftersom många andragradsekvationer kommer behövas lösas om de läser vidare. Lösningarna ska därför vara $x = 2 \pm 3$ i stället. Detta ger $x_1 = -1$ och $x_2 = 5$.

Använder en icke-färdig andragradsekvation med pq på en gång, utan koefficient 1 på x^2-termen

10. Sari ska lösa ekvationen $2x^2 - 8x + 6 = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 6}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{10}$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{10} \text{ och } x_2 = 4 - \sqrt{10}$$

Vad gör Sari för misstag? Kan du hjälpa Sari genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

- Försöker använda lösningsformeln (pq-formeln) på en gång, utan att koefficienten på x^2-termen är 1. Då fungerar inte pq-lösningsformeln. (Däremot skulle abc-formeln kunna användas.)
- Man kan kommentera att det är bra att Sara skrivit $4 + \sqrt{10}$ och $4 - \sqrt{10}$ som värdet på lösningarna, eftersom det är det exakta värdet. Ofta är det ju heltalslösningar, men ibland kan lösningar faktiskt se ut sådär.
- Riktig lösning är $2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$ som ger lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$

Börjar på en icke-effektiv metod, och gör sedan misstag

11. Leo ska lösa ekvationen $(x - 3)(x - 5) = 0$ Lösningen ser ut såhär:

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 5x - 3x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{4^2 + 15}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{31}$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{31} \text{ och } x_2 = 4 - \sqrt{31}$$

Vad gör Leo för misstag? Kan du hjälpa Leo genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

- Leo utvecklar parenteserna korrekt, men i 5:e raden gör han ett teckenfel på 15 som fortfarande är +15 under rottecknet, när det borde vara -15. Därför får han fel lösningar. Snygg lösning i övrigt, men ineffektiv.
- Om nollprodukt används i första steget ges lösningarna direkt som $x_1 = 3$ och $x_2 = 5$.
- Här kan en diskussion föras om att det är viktigt att inte bara kunna pq-formeln.

Övergeneralisering av att utföra operationer för linjära ekvationer

12. Emma ska lösa ekvationen $x^2 + 4x = 16$. Lösningen ser ut såhär:

$$x^2 = 16 - 4x$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16 - 4x}$$

$$x = 4 - 2x$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Vad gör Emma för misstag? Kan du hjälpa Emma genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

- Emma tänker kanske att som med enkla andragradsekvationer där det bara finns en kvadratterm och konstantterm så kan man sätta x^2 ensamt i VL och sedan ”ta roten ur” på båda sidor. Talen 16 och 4x ser sedan lätta ut att förenkla.
- Här kan det vara värt att påpeka att roten ur summan av två tal inte är samma som att ta roten ur varje tal för sig, även om det dessutom är felaktigt att roten ur 4x är 2x.
- Från steg 1 till steg 2 skulle det dessutom behöva vara $\pm\sqrt{16 - 4x}$ i rad två, eftersom $\sqrt{x^2} = |x|$ som ger båda möjligheterna på x. Det skulle ändå inte vara en framkomlig väg vidare, men då skulle i alla fall det steget stämma.
- En bättre lösning är att när man har en andragradsekvation med samtliga tre termer, att man då flyttar alla termer till VL så att man får VL=0. Alltså, $x^2 + 4x - 16 = 0$ som med lösningsformeln ger $x = -2 \pm \sqrt{4^2 - 16}$, som ger dubbelroten $x = -2 \pm 0$.
- (Här kan man också se att eftersom $x^2 + 4x - 16 = 0$ är en perfekt kvadrat, kan man med kvadreringsregeln faktorisera den till $x^2 + 4x - 16 = (x - 2)^2$, som också direkt ger dubbelroten 2 med nollprodukt)

Aktivitet 5 (Elevinformation)

Titta på de här lösningarna och försök besvara de frågor som står till varje lösning.

1. Ella ska lösa ekvationen $x^2 = 8x$. Lösningen ser ut såhär:

$$x^2 = 8x$$

$$\frac{x^2}{x} = \frac{8x}{x}$$

$$x = 8$$

Vad gör Ella för misstag? Kan du hjälpa Ella genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

---

2. William ska lösa ekvationen $x^2 - 12x = 28$. Lösningen ser ut såhär:

$$x^2 - 12x = 28$$

$$x(x - 12) = 28$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ och } x_2 = 12$$

Vad gör William för misstag? Kan du hjälpa William genom att förklara vad misstaget är och ge ett förlag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

---

3. Andragradsekvationen $x^2 - 16 = 0$ är given. Melvin, Linnea, och Theo ska lösa den, och gör på tre olika sätt.

Melvin:

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

Linnea:

$x^2 - 16 = 0$

$(x + 4)(x - 4) = 0$

$x_1 = -4$ och $x_2 = 4$

Theo:

$x^2 - 16 = 0$

$x = -0 \pm \sqrt{0^2 + 16}$

$x = -0 \pm \sqrt{16}$

$x = -0 \pm 4$

$x_1 = -0 + 4 = 4$

$x_2 = -0 - 4 = -4$

Vad säger du om lösningarna? Vilken lösning är lämpligast? Vad kan vara anledningen till att Melvin, Linnea och Theo väljer just sitt sätt att lösa uppgiften på?

---

4. Elias ska lösa ekvationen $x^2 = 144$. Lösningen ser ut såhär:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$

Vad gör Elias för misstag? Kan du hjälpa Elias genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

---

5. Julia ska lösa ekvationen $(x + 6)(x - 2) = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 6 \text{ och } x_2 = -2$$

Vad gör Julia för misstag? Kan du hjälpa Julia genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

---

6. Hugo ska förklara varför ekvationen $(x - 2)(x - 5) = 0$ har lösningarna $x_1 = 2$ och $x_2 = 5$. Förklaringen låter såhär: ”Lösningarna är $x_1 = 2$ och $x_2 = 5$ eftersom $(2 - 2)(5 - 5) = 0$”

Vad säger du om Hugos förklaring? Hur skulle din förklaring se ut?

---

7. Norah ska lösa ekvationen $3x^2 = 6x$. Lösningen ser ut såhär:

$$3x^2 = 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ och } x_2 = \frac{2}{3}$$

Vad gör Norah för misstag? Kan du hjälpa Norah genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

---

8. Muhamed ska lösa ekvationen $4x^2 - 9 = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(4x + 3)(4x - 3) = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{4} \text{ och } x_2 = \frac{3}{4}$$

Vad gör Muhamed för misstag? Kan du hjälpa Muhamed genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

---

9. Liam ska lösa ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$$

$$x_1 = -5 \text{ och } x_2 = 1$$

Vad gör Liam för misstag? Kan du hjälpa Liam genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

---

10. Sari ska lösa ekvationen $2x^2 - 8x + 6 = 0$. Lösningen ser ut såhär:

$$x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 6}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{10}$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{10} \text{ och } x_2 = 4 - \sqrt{10}$$

Vad gör Sari för misstag? Kan du hjälpa Sari genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

---

11. Leo ska lösa ekvationen $(x-3)(x-5)=0$ Lösningen ser ut såhär:

$$(x-3)(x-5)=0$$

$$(x-3)(x-5)=x^2-5x-3x+15=0$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$x=4\pm\sqrt{4^2+15}$$

$$x=4\pm\sqrt{31}$$

$$x_1=4+\sqrt{31} \text{ och } x_2=4-\sqrt{31}$$

Vad gör Leo för misstag? Kan du hjälpa Leo genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer. Kan du också ge förslag på något sätt att undvika den här typen av misstag i framtiden?

---

12. Emma ska lösa ekvationen $x^2+4x=16$. Lösningen ser ut såhär:

$$x^2=16-4x$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{16-4x}$$

$$x=4-2x$$

$$3x=4$$

$$x=\frac{4}{3}$$

Vad gör Emma för misstag? Kan du hjälpa Emma genom att förklara vad misstaget är och ge ett förslag på ett sätt att lösa ekvationen som stämmer.

Bilaga 2 – Uppgiftsmaterial att använda i undervisning

Här finns uppgiftsmaterial att använda i undervisning.

Detta är bilaga 2 till ”Lärarguide för planering av undervisning av andragradsekvationer”

Innehåll i denna bilaga:

Uppgifter från frisläppta Nationella prov

Är tänkta att du som lärare ska kunna se ungefär vad kraven nationellt sett ligger kring vad en elev ska kunna, samt som exempel att visa, eller för elever att arbeta med.

Utmanande uppgifter

Är tänkta för att du som lärare ska kunna ge som utmaningar till de elever som behöver det.

Elevlathund för olika typer av ekvationer och deras lösningar

Är tänkt som ett möjligt stöd att ge till elever, eller som en mall att skapa en begreppskarta tillsammans med eleverna på tavlan.

Exit tickets

Är tänkta att kunna använda i slutet av en lektion eller lektionsdel för att undersöka elevernas förståelse, vad de fått med sig.

Andragradsekvationer i nationella prov 2c

Samtliga uppgifter hämtade från tidigare givna prov, som numer är frisläppta, från https://www.umu.se/institutionen-for-tillampad-utbildningsvetenskap/np/np-2-4/tidigare-givna-prov/

Lösningar till flera av dessa uppgifter finns i videoformat på https://vidma.se/np2x2ekv/ .

Från NP Matematik 2c VT12:

3. Lös ekvationerna

a) $x(x+7)=0$ ______________________(1/0/0)

12. Lös ekvationerna med algebraisk metod.

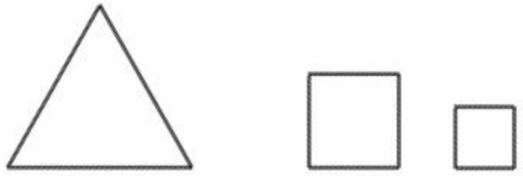
a) $x^2-4x-45=0$ (2/0/0)

b) $\sqrt{35-2x}=x$ (0/3/0)

14. I ekvationen $x^2-(a-1)^2=0$ är a en konstant.
Lös ekvationen och svara på så enkel form som möjligt. (0/0/2)

Med digitala hjälpmedel

23. Ett tunt snöre är 24 m långt. Snöret kan formas till olika geometriska figurer.



Figur 1 Figur 2

a) Hela snöret formas till en liksidig triangel, se Figur 1.
Bestäm triangelns area. (0/3/0)

b) Snöret delas sedan i två olika långa delar. Av varje del formas en kvadrat, se Figur 2.
Undersök om det är möjligt att kvadraterna tillsammans får arean 17 m^2. (0/0/4)

Från NP Matematik 2c HT12:

3. Lös ekvationerna och svara exakt.

a) $x^2 - 4x = 0$ ____________________ (1/0/0)

8. Ge ett exempel på en andragradsekvation som saknar reella rötter.

____________________ (0/1/0)

11. Lös ekvationen $x^2 + 2x - 24 = 0$ algebraiskt. (2/0/0)

Från NP Matematik 2c VT13:

10. Lös ekvationen $x^2 - 8x - 9 = 0$ med algebraisk metod. (2/0/0)

13. Lös ekvationen $\sqrt{5 - x} + 3 = x$ med algebraisk metod. (0/3/0)

Från NP Matematik 2c HT13:

10. Lös ekvationerna med algebraisk metod.

a) $x^2 - 6x - 16 = 0$ (2/0/0)

b) $\sqrt{2x + 3} = x$ (0/3/0)

Från NP Matematik 2c VT14:

10. Lös ekvationen $(x - \sqrt{3})^2 - 4(x - \sqrt{3}) + 3 = 0$ om du vet att $t^2 - 4t + 3 = 0$ har lösningarna $t_1 = 3$ och $t_2 = 1$. Svara med exakta värden.

$x_1 =$ ____________________

$x_2 =$ ____________________ (0/0/1)

13. Lös ekvationerna med algebraisk metod.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ (2/0/0)

b) $x(x + 3) = x + 3$ (0/2/0)

17. I ekvationen $ax^2 - a^2x = -2$ är a en positiv konstant. Lös ekvationen och visa vilka värden på a som ger två olika reella rötter. (0/0/3)

Från NP Matematik 2c HT14:

11. Lös ekvationerna med algebraisk metod.

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$ (2/0/0)

b) $(x-4)^2 = 2(x-4)$ (0/2/0)

Med digitala hjälpmedel

21. En rektangels längd är 10 cm längre än dess bredd. Bestäm hur långa sidorna i rektangeln är om dess area är $80\ \text{cm}^2$. (2/1/0)

Från NP Matematik 2c VT15:

5. Två av ekvationerna A – E har reella lösningar. Vilka två?

A. $x^2 + 3 = 1$

B. $x^2 + 6x - 3 = 2$

C. $x^2 = -9$

D. $x^2 - 4x + 9 = 2$

E. $(x-2)(x+2) = 0$ ____________________ (0/1/0)

10. Lös andragradsekvationen $x^2 - 6x + 5 = 0$ med algebraisk metod. (2/0/0)

14. En andragradsekvation $x^2 + (a+4)x + (b+5) = 0$ har lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$
Bestäm värdet på a och b. (0/2/0)

Från NP Matematik 2c VT22:

6. Lös ekvationerna och svara exakt på enklaste form.

d) $(3x-4)(4-3x) = -9x^2$ ____________________ (0/1/0)

e) $(5987-x)^2 - 2(5987-x) = 0$ ____________________ (0/0/1)

9. Lös andragradsekvationen $x^2 + 8x + 12 = 0$ med algebraisk metod. (2/0/0)

Utmanande uppgifter

Här följer några uppgifter som skulle kunna ges som utmaningar till elever som behöver det, eller för hela klassen om det bedöms vara rimligt. Dessa är framtagna genom NRICH-projektet vid Universitetet i Cambridge. Mer information kring uppgifterna finns på hemsidan via länkarna nedan.

Uppgift 1:

Mega quadratic equations, hämtad från https://nrich.maths.org/11009 och första delen översatt här:

Hitta alla reella lösningar till ekvationen

$$(x^2 - 5x + 5)^{(x^2-11x+30)} = 1$$

Det finns sex möjliga lösningar till ekvationen. Kan du hitta dem alla?

- Ledning: Ekvationen löses genom att tänka på vilka fall som ger 1^a, a^0, och $(-1)^b$ där a kan vara vad som helst och b är jämn.
- Detta ger alltså att undersöka när basekvationen är 1 eller -1, samt när exponentekvationen är 0. För basekvationen lika med -1 ges lösningar bara i de fall då b är jämn. Därför måste de x-värden som fås som lösningar i bas-ekvationen testas att sättas in i exponentens uttryck för att se om de ger jämna tal, för att de lösningarna ska vara lösningar till ekvationen.
- Fortsättning ges via länken *från https://nrich.maths.org/11009*

Fler utmanande uppgifter finns.

Uppgift 2: Irrationella rötter

https://nrich.maths.org/11596

Uppgift 3: Fibonacci

https://nrich.maths.org/2816

Uppgift 4: Fractions i fractions

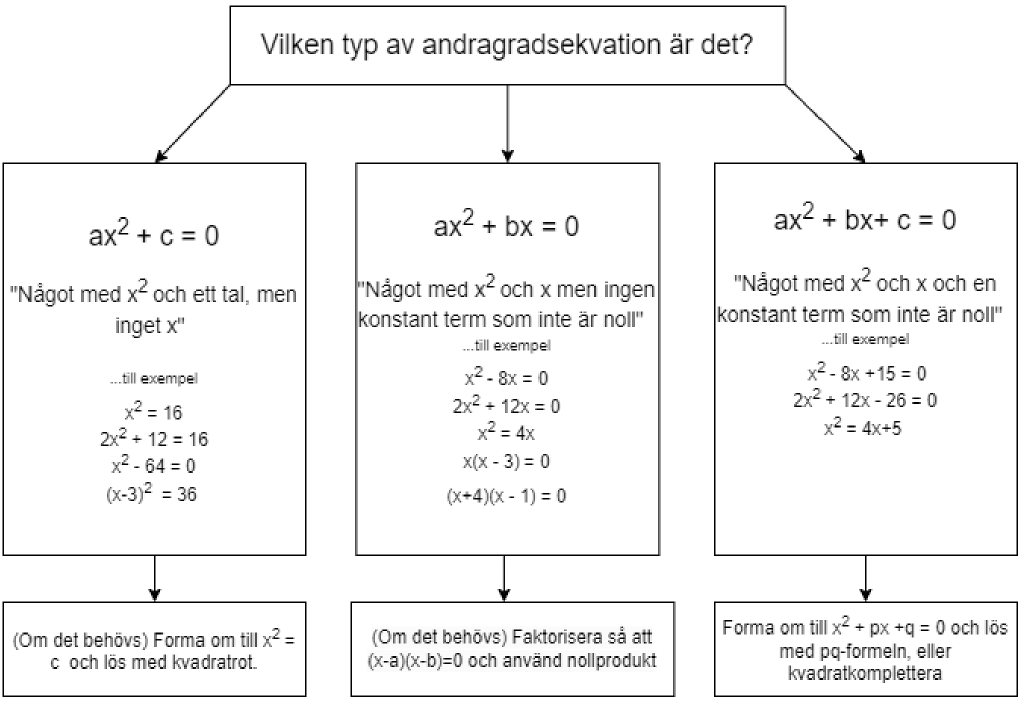
https://nrich.maths.org/319

Uppgift 5: Fördjupad substitution

https://nrich.maths.org/7074

Förslag på lathund för lösning av olika typer av andragradsekvationer

Här är ett förslag på lathund som hjälp för elever att lösa olika typer av andragradsekvationer. Den skulle också kunna vara ett stöd för utformande av mall för en gemensam begreppskarta som lärare och elever skapar tillsammans på tavlan vid något tillfälle.



Exit tickets

Några uppgifter som kan användas som flervalsfrågor, på papper, eller i till exempel mentimeter[1] eller annat elevresponssystem.

Följande frågor är tänkta att svara mot vanliga misstag då användandet av dessa finns med som distraktorer bland svarsalternativen.

Vilka är lösningarna till ekvationen

$$x(x-6) = -8$$

a) $x_1 = 0$ och $x_2 = 6$
b) $x_1 = 0$ och $x_2 = -6$
c) $x_1 = 2$ och $x_2 = 4$
d) $x_1 = -2$ och $x_2 = -4$

Vilka är lösningarna till ekvationen

$$x^2 + 3x = 4$$

a) $x = \frac{4}{3}$
b) $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$
c) $x_1 = 1$ och $x_2 = -4$
d) $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$

Vilka är lösningarna till ekvationen

$$(x-3)(x+4) = -10$$

a) $x_1 = -3$ och $x_2 = 4$
b) $x_1 = 3$ och $x_2 = -4$
c) $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$
d) $x_1 = 1$ och $x_2 = -2$

Vilka/vilken är lösningen/lösningarna till ekvationen

$$x^2 = 8x$$

a) $x = 0$
b) $x = 8$
c) $x_1 = 0$ och $x_2 = 8$
d) $x_1 = 2$ och $x_2 = 8$

[1] www.mentimeter.com

Vilka är lösningarna till ekvationen

$$x^2 - 16 = 0$$

a) $x = 4$
b) $x = 16$
c) $x_1 = -16$ och $x_2 = 16$
d) $x_1 = -4$ och $x_2 = 4$

Standardfrågor

Följande frågor är tänkta att vara en kort kontroll av om en elev kan lösa de tre vanligaste typerna av andragradsekvation. De finns i tre nivåer, med viss svårighetsgradsökning. På nästa sida finns förslag på A4 med rutat papper att använda om man vill att eleverna ska kunna skriva direkt på pappret och sedan lämna in till dig.

Lös ekvationerna

a) $x^2 = 16$
b) $x^2 - 6x = 0$
c) $x^2 - 4x - 5 = 0$

Ekvationer som kräver omformning innan de kan lösas:

Lös ekvationerna

a) $x^2 - 16 = 0$
b) $6x^2 = 18x$
c) $2x^2 - 8x = 10$

Ekvationer som kräver omformning innan de kan lösas och med lätt aritmetisk utmaning:

Lös ekvationerna

a) $x^2 - 0{,}16 = 0$
b) $10x^2 = 5x$
c) $x(x - 3) = -2$

Exit ticket

Lös ekvationerna: (Lägg in en uppsättning av standardfrågorna här)

a) $x^2 = 16$
b) $x^2 - 6x = 0$
c) $x^2 - 4x - 5 = 0$

Appendix B

$Efternamn$, $Förnamn$
$Adress$
$Postnummer$ $Stad$

Dina svar är viktiga!

Här följer nu några frågor som forskningsprojektet vill ha svar på för att bättre förstå lärares behov och hur en sådan här lärarguide kan svara mot dessa behov. Vi är tacksamma för allt Du vill dela med dig av kring ditt användande av lärarguiden i planering och undervisning av andragradsekvationer.

Det kan vara användbart för dig att vid behov ha lärarguiden tillgänglig att bläddra i (eller titta i digitalt) i samband med att du besvarar frågorna. För att enklare kunna besvara frågorna rekommenderas att du besvarar enkäten via dator.

Så här fyller du i pappersenkäten
Nedan ser du hur du markerar ett svarsalternativ och hur avmarkerar ett redan gjort val.

Korrekt markerat svarsalternativ

Inkorrekt markerat svarsalternativ, krysset ska vara mitt i rutan

Inkorrekt markerat svarsalternativ, krysset är alltför kraftigt

Ångrat val, svarsalternativet räknas inte som markerat

Hur länge har du arbetat som matematiklärare?

- ☐ 0-3 år
- ☐ 3-10 år
- ☐ 10+ år

Hur många gånger har du undervisat om andragradsekvationer tidigare? (Varje klass och kurs räknas som en gång.)

- ☐ 0 gånger
- ☐ 1-3 gånger
- ☐ 4+ gånger

Har du använt något av innehållet i lärarguiden? Med använt menas här till exempel något av följande, att du -tänkt på något speciellt sätt i planering eller undervisning efter något du läst i lärarguiden -påverkats i vad du valt att säga eller ta upp i genomgångar -använt någon aktivitet eller uppgift, eller delar av dem, på något sätt i undervisningen

- ☐ Ja
- ☐ Nej

Du har i förra frågan angett att du använt lärarguiden på något sätt. Nu kommer några frågor om användandet av de olika delarna. De första fyra delarna i guiden kan ses som en form av didaktiska beskrivningar (här inringat i grönt): Har någon av dessa första fyra delar påverkat din planering av undervisning om andragradsekvationer? Med påverkan menas här till exempel att något du läst i de här delarna har gjort att du tänkt kring undervisning av andragradsekvationer på ett annat sätt, eller att det påverkat innehållet eller upplägget i din undervisning.

- ☐ 1. Tidigare forskning om elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer
- ☐ 2. Några lärares erfarenheter av elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer
- ☐ 3. Beskrivning av hur andragradsekvationer behandlas i svensk gymnasieskola i ämnesplaner, vanliga läromedel, och nationella prov
- ☐ 4. Förslag på hur tidigare forskning och lärarerfarenheter kan hanteras i undervisning av andragradsekvationer
- ☐ Ingen av dessa delar har påverkat min planering eller undervisning

Kan du beskriva på vilket/vilka sätt du påverkats av de delar du markerat?

Även den här frågan handlar om de första fyra delarna i lärarguiden (här inringat i grönt) Hur värdefulla upplevde du att de olika delarna var för dig i din planering av undervisning av andragradsekvationer?

	Inte alls värdefull	Något värdefull	Mycket värdefull
1. Tidigare forskning om elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer	☐	☐	☐
2. Några lärares erfarenheter av elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer	☐	☐	☐
3. Beskrivning av hur andragradsekvationer behandlas i svensk gymnasieskola i ämnesplaner, vanliga läromedel, och nationella prov	☐	☐	☐
4. Förslag på hur tidigare forskning och lärarerfarenheter kan hanteras i undervisning av andragradsekvationer	☐	☐	☐

Del 5 och 6 i lärarguiden är förslag på lektionsaktiviteter och uppgiftsmaterial (här inringat i grönt): Har du använt något från dessa delar när du planerat och genomfört undervisningen av andragradsekvationer?

☐ 5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 1 - Introduktion

☐ 5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 2 - Identifiera typer av andragradsekvationer och lös tillsammans

☐ 5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 3 - Diskriminanten

☐ 5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 4 - Olika lösningsmetoder

☐ 6. Uppgiftsmaterial - NP-uppgifter

☐ 6. Uppgiftsmaterial - Uppgifter som bygger på vanliga misstag

☐ 6. Uppgiftsmaterial - Utmanande uppgifter

☐ 6. Uppgiftsmaterial - Lathund för olika metoder för att lösa andragradsekvationer

☐ 6. Uppgiftsmaterial - Exit tickets

☐ Inte använt något från dessa delar

Kan du beskriva på vilket sätt du använt de(t) du markerat?

Även den här frågan handlar om del 5 och 6 i lärarguiden (här inringat i grönt): Hur värdefulla upplevde du att de olika delarna var för dig i din planering av undervisning av andragradsekvationer?

	Inte alls värdefull	Något värdefull	Mycket värdefull
5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 1 - Introduktion	☐	☐	☐
5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 2 - Identifiera typer av andragradsekvationer och lös tillsammans	☐	☐	☐
5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 3 - Diskriminanten	☐	☐	☐
5. Förslag på lektionsaktiviteter - Aktivitet 4 - Olika lösningsmetoder	☐	☐	☐
6. Uppgiftsmaterial - NP-uppgifter	☐	☐	☐
6. Uppgiftsmaterial - Uppgifter som bygger på vanliga misstag	☐	☐	☐
6. Uppgiftsmaterial - Utmanande uppgifter	☐	☐	☐
6. Uppgiftsmaterial - Lathund för olika metoder för att lösa andragradsekvationer	☐	☐	☐
6. Uppgiftsmaterial - Exit tickets	☐	☐	☐

Del 7 i lärarguiden är referenslistan (här inringat i grönt): Har du använt referenslistan för att söka efter och/eller läsa studierna som nämns i tidigare forskning?

- [ ] Ja
- [ ] Nej

Kan du beskriva på vilket sätt du använt den?

Även den här frågan handlar om del 7 i lärarguiden(här inringat i grönt): Hur värdefull upplevde du att referenslistan var för dig i din planering av undervisning av andragradsekvationer?

- [ ] Inte alls värdefull
- [ ] Något värdefull
- [ ] Mycket värdefull

Hur mycket tid skulle du uppskatta att du lagt på att läsa/arbeta med guiden?

- [ ] 0-1 h
- [ ] 1-3 h
- [ ] 3+ h

Kommentar

Har du genom användandet av lärarguiden gjort någonting nytt eller annorlunda i din undervisning? I sådana fall vad?

Har du genom lärarguiden fått några nya idéer eller insikter? I sådana fall vilka?

I vilken utsträckning stämmer följande påståenden?

	Inte alls	I liten utsträckning	I stor utsträckning
Lärarguiden som helhet underlättade mitt arbete med att planera undervisning om andragradsekvationer.	☐	☐	☐
Lärarguiden som helhet underlättade mitt arbete med att genomföra undervisning om andragradsekvationer.	☐	☐	☐
Lärarguiden var lätt att läsa.	☐	☐	☐
Lärarguiden hade en design som gjorde det lätt att navigera.	☐	☐	☐
Lärarguiden mötte ett behov jag har som lärare.	☐	☐	☐
Lärarguiden fungerade på ett sätt som ligger i linje med hur jag vill undervisa.	☐	☐	☐
Lärarguiden uppfyllde de förväntningar jag hade när jag tackade ja till att delta i studien.	☐	☐	☐

Kommentar

Finns det behov du som lärare har eller förväntningar du hade på den här lärarguiden som inte möttes? I sådana fall vilka?

Vilka resurser använder du dig vanligtvis av vid planering av undervisning av andragradsekvationer? En resurs kan till exempel vara en lärobok, en kollega, en webbsida eller liknande.

Finns det något som lärarguiden bidragit med som du inte kan hitta i någon annan resurs? I sådana fall vad?

Finns det något annat matematiskt område inom någon kurs på gymnasiet där en liknande guide skulle vara till nytta? I sådana fall vilket/vilka område(n)?

Du har angett att du inte använt guiden alls. Vad var anledningen till att du inte använde något från lärarguiden?

Hur hade guiden kunnat varit konstruerad för att vara användbar för dig? Vad skulle den innehålla/inte innehålla?

Upptäckte du några direkta felaktigheter i lärarguiden eller dess bilagor?

☐ Ja

☐ Nej

Kommentar

Finns det något du skulle vilja lägga till som du inte fått möjlighet att ge din syn på i någon fråga tidigare?

En sista fråga: Kan du tänka dig att bli tillfrågad om att bli intervjuad för att fördjupa förståelsen kring dina svar och ditt användande?

☐ Ja

☐ Nej

Appendix C

Introduktion (3 minuter)

Inledning, monolog: Hej, trevligt att få komma hit. Tack för att du tagit dig tid att prata med mig. Jag vill också passa på att fråga om samtycke igen till att spelas in? *(om ja, gå vidare, annars avsluta, tacka och åk hem)* Forskningsetiskt så vill jag också upprepa att du kan närsomhelst avbryta, eller välja att inte svara på någon fråga om du inte skulle vilja, så att du vet att du har den möjligheten.

Syftet med studien är ju att få reda på om och hur lärarguider av den här typen kan vara av värde för lärare.

- Om den kan stötta i planering
- Om den kan stötta i att genomföra undervisning
- Om den på något sätt kan verka fortbildande.

Jag är också intresserad av just den här guiden om andragradsekvationer, om hur den är, och hur den kan förbättras.

I studien åker jag runt och frågar flera lärare som tagit del av guiden.

Viktigt med din syn. Viktigt varför du valde att använda vissa saker och inte andra. När jag ställer varför-frågor så är det inte för att på något sätt ifrågasätta, utan för att jag vill förstå vad du ser är viktigt, och dina anledningar till att du gör och gjorde olika val.

Den här guiden är framtagen i ett första steg som ett första utkast baserat på vad viss forskning säger skulle kunna vara stöttande. Men det är inte alls säkert att det gäller, och det är viktigt att få reda på vad det är som fungerar och vad som inte fungerar.

Du har skrivit massa intressanta saker i enkäten, och en del av dem vill jag följa upp och fördjupa med frågor.

Jag vill också ställa några ytterligare frågor kring guiden, och kring planering och undervisning.

Intervjun består av 4 delar.

- Först tänkte jag att vi skulle prata om de första inledande didaktiska texterna i lärarguiden
- sedan om aktiviteterna och uppgifterna som följde med.
- Som tredje tänkte jag att vi kunde prata om just den här lärarguidens form och innehåll i allmänhet
- som fjärde skulle jag vilja ställa några frågor om den här typen av lärarguider i allmänhet

Frågepaket 1: Didaktiska texterna i guiden 1-4 (max 15 minuter)

<table>
<tr>
<td>

Vilka delar användes/påverkades av?

Vad var det i delarna som användes/påverkades av?
Hur påverkade de olika delarna undervisningen?

Ledde till aktiviteter i guiden?
Ledde till något annat för undervisningen?

Andra aktiviteter?
påverkade genomgångar?
ändrat i klassrummet?

Hittades något som inte kunde hanteras?

Vilka delar användes inte/påverkade inte?

Varför användes/påverkades inte?

Vad var det i delarna som inte påverkades?

Om vi går över allmänt:

Hur gör du normalt sett när du planerar undervisning? Vad letar du efter för didaktisk information? Varför då? Hur passade den här guiden in i den praktiken?
Hur mötte innehållet i den här guiden det? Vad möttes inte? Vilken sorts information skulle du vilja ha?
Hur är ditt behov/intresse av tidigare forskning och lärares erfarenheter? Hur möttes det i de delarna? Vad hade du velat ha?
Hur ser du på uppdelningen i 4 delar, forskning, lärares erfarenhet, svensk gymnasiekontext och förslag på hantering. Hade det kunnat organiserats på något annat sätt för att mer naturligt stötta din praktik?

</td>
<td>Lärarinput från enkäten:</td>
</tr>
</table>

Frågepaket 2: ***Aktiviteterna och uppgifterna (max 15 minuter)***

Aktiviteterna

- Vilka har använts?
    - Varför användes de?
    - Hur användes de?
        - Modifieringar/anpassningar?
- Vilka har **inte** använts?
    - Varför användes **inte**?
- Hur var det med lärarinformationen? Hur uppfattades den?
    - Hjälpsam, svår, information som saknades/överflödig?

Uppgifterna

- Vilka har använts?
    - Varför användes de?
    - Hur användes de?
        - Modifieringar/anpassningar?
- Vilka har **inte** använts?
    - Varför användes **inte**?
- Hur var det med lärarinformationen? Hur uppfattades den?
    - Hjälpsam/svår/information som saknades/överflödig?

Speaking to och speaking through mot 9

- Var det någon form av undervisning, eller undervisningsmetod, eller sätt att tänka kring undervisning som du genom att läsa den här guiden genomförde som du inte tidigare gjort?
- Hur ser du på att genomföra lektionsaktiviteter som är designade av någon annan?
- Vad är det som krävs av en sådan lektionsaktivitet, för att du ska tycka den är värdefull att använda?
- Vad är viktigt i en aktivitet för att du ska vilja genomföra den? Varför då?
- Hur ser du på graden av styrning i genomförande som lektionsaktiviteterna har?

Lärarinput från enkäten:

Frågepaket 3: Allmänna frågor om guiden mot features, främst 6-13 (max 10 minuter)

Jag tänkte nu ställa några frågor som handlar om guiden som helhet. Jag tänkte att du skulle få kommentera på några olika aspekter. *Börja på språket i guiden (där varje lärare haft något att säga om, som jag tar upp) och gå motsols. Efter styrd eller stöttad kommer nästa frågor.*

Vidare till några auktoritetsfrågor:

- Att denna guiden kom som en del av ett forskningsprojekt, och att den var sagd att baseras på tidigare forskning, hur spelade det roll för dig?
- Kände du något krav på att använda något överhuvudtaget?

Lärarinput från enkäten:

Du har markerat att du tyckte språket var …

Om organisationen, tid till planering+ allokerad tid i lektioner

- Hur var det urvalda innehållet av vad man ska behandla inom andragradsekvationer i lärarguiden jämfört med hur du ser på vad som bör ingå i kursen?
- Hur ser du på tiden som behövs för att använda guiden i relation till den tid du har att lägga på planering?
- Hur ser du på tiden som behövs för att använda guidens föreslagna innehåll i relation till den lektionstid du har att lägga på andragradsekvationer?
- Hur stor del av den lektionstid du lägger på andragradsekvationer fick aktiviteter eller uppgifter från detta? *Följdfråga*: ersatte du något annat, eller var det att du lade på något extra? Togs från något annat område?

Alignment med egen syn på lärande och undervisning

- Hur ser du på hur du vill undervisa?
- Hur är synen på undervisning och lärande som framställs i guiden jämfört med hur du ser på undervisning? Vad ser du för skillnader och likheter?
- *På flera ställen finns det inlagt en syn på undervisning och lärande som att elever lär sig genom att lära sig urskilja/gruppera/sortera/få syn på olika delar av matematiken genom att uppleva variation (nämn variationsteori).* Hur stämmer din bild av undervisning och lärande överens med en sådan syn?

Om guiden som resurs, underlag som inbjuder till diskussion

- Har du diskuterat innehållet i guiden, eller någon undervisning genom guiden, med någon kollega? *(För att ta reda på om den här sortens input är något som naturligt leder till kollegiala didaktiska samtal)*
- Innan du tog del av den här lärarguiden, vilken typ av lärarguider/lärarhandledningar/lärarstöd har du använt dig av i din lärarpraktik? *Följd: hur kommer det sig? Anledningar/varför då tror du?*

Lärarinput från enkäten:

Frågepaket 4: Allmänna frågor kring stöttningen i planering, undervisning och lärande

<table>
<tr>
<td>

Varför ställs frågorna?
Forskningsfråga: information om stöttning i professionellt lärande

Nu har det gått en tid sedan du använt lärarguiden. Kan du berätta om hur du tänker kring ditt möte med den såhär efteråt?
Har den påverkat hur du ser på undervisning i stort? Följdfråga om ja: Hur då?
Har den påverkat dig hur du agerar som lärare på något sätt? Följdfråga om ja: På vilket sätt skulle du säga att den påverkat dig?
Om du skulle resonera kring att den här lärarguiden skulle kunna fungera som fortbildning. Tycker du själv att du lärt dig något genom användandet?
Om en sådan här guide funnits tillgänglig för dig för varje matematiskt område du undervisar i alla kurser, hade det påverkat din planering av undervisning och undervisning tror du? Om ja, hur?

</td>
<td>

Lärarinput från enkäten:

</td>
</tr>
</table>

Frågepaket 5: Sammanfattande om revision av guiden

Om ändringar • Om man ska stötta just **dig** med en lärarguide, för ett visst matematiskt område, vad är det då den ska innehålla? • Har du några förslag på hur den skulle kunna omarbetas? Lägga till/ta bort delar? Utöka någon del? • Vad tycker **du** ska behållas i den här lärarguiden till nästa omgång den ges, och vad tycker du ska förändras, läggas till, eller tas bort??	***Lärarinput från enkäten:***

Appendix D

För att kunna veta hur lärarguiden fungerar för olika lärare behöver vi att du svarar på följande fyra bakgrundsfrågor.

Så här fyller du i pappersenkäten
Nedan ser du hur du markerar ett svarsalternativ och hur avmarkerar ett redan gjort val.

Korrekt markerat svarsalternativ

Inkorrekt markerat svarsalternativ, krysset ska vara mitt i rutan

Inkorrekt markerat svarsalternativ, krysset är alltför kraftigt

Ångrat val, svarsalternativet räknas inte som markerat

Hur många år har du arbetat som matematiklärare? Ange 0 om detta är ditt första år.

Hur många gånger har du undervisat om andragradsekvationer tidigare? (Varje klass och kurs räknas som en gång, Matematik 2a, 2b eller 2c, eller Matematik B i gamla systemet)

Hur väl stämmer dessa påståenden för dig?

	Stämmer mycket bra	Stämmer ganska bra	Stämmer ganska dåligt	Stämmer mycket dåligt
Den lektionsfria tiden jag har till planering i mitt schema är rimlig	☐	☐	☐	☐
Jag upplever att jag hinner planera mina lektioner	☐	☐	☐	☐
Om jag behöver, finns stöttning från kollegor i matematik i frågor om undervisning	☐	☐	☐	☐
Jag är intresserad av forskning om undervisning och lärande som ger mig nya övergripande idéer kring min undervisning	☐	☐	☐	☐
Jag är intresserad av forskning om undervisning och lärande som jag direkt kan använda i klassrummet	☐	☐	☐	☐

Hur ofta gör du något av följande?

	Aldrig	Någon gång per år	Någon gång i månaden	Någon gång i veckan	Flera gånger i veckan
Planerar matematiklektioner eller innehåll i matematiklektioner tillsammans med någon kollega	☐	☐	☐	☐	☐
Läser texter kring undervisning och lärande i matematik (forskningsartiklar, skolverkstexter, blogginlägg, m.m.)	☐	☐	☐	☐	☐
Deltar i organiserad fortbildning kring undervisning och lärande i matematik	☐	☐	☐	☐	☐

Tack för bakgrundsinformationen! Nu återstår endast följande två frågor innan lärarguiden görs tillgänglig. Efter att du klickat på "Skicka in" kommer en länk till en mapp i molntjänsten BOX på Karlstads universitet visas, där du har möjlighet att gå in och hämta lärarguiden direkt. Lärarguiden kommer också att skickas till den mailadress du anger i nästa fråga.

Vänligen ange den mailadress som du vill att vi kontaktar dig på inom ramen för studien. Vi kommer använda mailadressen för att skicka lärarguiden och den uppföljande enkäten till dig, och vi kommer också använda mailadressen för att koppla samman dina svar på enkäter och en eventuell intervju.

När du är klar med planering och undervisning av andragradsekvationer kommer den efterföljande enkäten att skickas till den mailadress du angett ovan. Ange på ett ungefär när planering och undervisning av andragradsekvationer är färdig:

- -

Appendix E

$Efternamn$, $Förnamn$
$Adress$
$Postnummer$ $Stad$

Dina svar är viktiga!

Här följer nu några frågor som forskningsprojektet vill ha svar på för att bättre förstå hur en sådan här lärarguides olika innehåll möjligtvis kan stötta olika lärare i planering, i undervisning, och i det egna lärandet genom ett sådant användande. Vi är tacksamma för allt Du vill dela med dig av kring ditt användande av lärarguiden. Det är Dina svar som kan hjälpa oss förstå hur denna och framtida lärarguider bör se ut och vad de bör innehålla för att de ska stötta lärare.

Det är beräknat att ta ca 20 minuter att besvara enkäten. Om du vill spara dina svar och återkomma till enkäten senare för att fortsätta, finns en knapp för det längst ner på varje sida bredvid knappen för "nästa sida".

Det är ca 35-40 frågor att besvara, vissa kortare och andra längre. Vissa frågor ställs olika beroende på svar på andra frågor. Numreringen slutar oavsett på fråga 45. Om du inte vill svara på en fråga så kan du lämna den obesvarad, förutom fråga 10 som är obligatorisk för att du ska kunna få passande frågor därefter.

Det kan vara användbart för dig att vid behov ha lärarguiden tillgänglig att bläddra i (eller titta i digitalt) i samband med att du besvarar frågorna. För att enklare kunna besvara frågorna rekommenderas att du besvarar enkäten via dator.

Så här fyller du i pappersenkäten
Nedan ser du hur du markerar ett svarsalternativ och hur avmarkerar ett redan gjort val.

 Korrekt markerat svarsalternativ

 Inkorrekt markerat svarsalternativ, krysset ska vara mitt i rutan

 Inkorrekt markerat svarsalternativ, krysset är alltför kraftigt

 Ångrat val, svarsalternativet räknas inte som markerat

Vilken skola undervisade du andragradsekvationer på?

Är du legitimerad för att undervisa i matematik på gymnasiet?

- [ ] Ja
- [ ] Nej

Är du forskarutbildad? (licentiat- eller doktorsexamen)

- [ ] Ja
- [ ] Nej

Hur många elevgrupper undervisade du i andragradsekvationer nu under vårterminen 2025?

- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3 eller fler

Skedde din undervisning av andragradsekvationer i Matematik 2c nu under vårterminen 2025 i en grupp på teknikprogrammet (TE), en grupp på naturvetenskapliga programmet (NA) eller i både och?

- [ ] TE
- [ ] NA
- [ ] Både i TE och NA
- [ ] Annat

Hur många lektionstimmar (antal h) per elevgrupp skulle du uppskatta att du lade i huvudsak på andragradsekvationer?

Ungefär hur många elever är det i den eller de grupper du undervisat i andragradsekvationer? (Flera val möjliga om du haft flera grupper i Matematik 2c)

- [ ] 20 eller färre
- [ ] 21-25
- [ ] 26-30
- [ ] 31-35
- [ ] 36 eller fler

Om du använder ett läromedel i planering och undervisning av hela kursen Matematik 2c nu i vårterminen 2025, vilket använder du då? (Flera möjliga val)

- [ ] Eddler
- [ ] Exponent
- [ ] Liber Matematik
- [ ] Matematik 5000/5000+
- [ ] Nationalencyklopedin
- [ ] Nokflex
- [ ] Origo
- [ ] Prefix
- [ ] Inget läromedel
- [ ] Annat

Använder du också lärarmaterial som tillhör det/de läromedlet/läromedlen i kurs Matematik 2c, såsom t.ex. en lärarhandledning, lärarguide, eller lärarwebb?

- [ ] Nej, inte alls
- [ ] Ja, i liten utsträckning
- [ ] Ja, i stor utsträckning
- [ ] Ja, i mycket stor utsträckning

Har du använt något av innehållet i lärarguiden för andragradsekvationer som du fick ta del av i den här studien? Välj "Ja" om du till exempel gjort något av följande, att du -tänkt på något speciellt sätt i planering eller undervisning efter något du läst i lärarguiden -valt att säga eller ta upp saker du läst i lärarguiden i genomgångar, eller i diskussioner med elever -använt någon av lärarguidens aktiviteter eller uppgifter, eller delar av dem, på något sätt i undervisningen Välj "Nej" om du tittat i guiden i någon utsträckning men inte gjort något speciellt i din undervisning till följd av detta.

- [ ] Ja
- [ ] Nej

Hur mycket tid skulle du uppskatta att du lagt på att läsa/arbeta med lärarguiden i samband med att du planerade din undervisning av andragradsekvationer?

- [ ] Mindre än 1 timme
- [ ] 1-3 timmar
- [ ] 4 timmar eller mer

Planerade du lektioner kring andragradsekvationer tillsammans med någon/några kollega/kollegor?

- [ ] Nej
- [ ] Ja, en lektion
- [ ] Ja, några lektioner
- [ ] Ja, alla lektioner

Använde ni lärarguiden när ni planerade tillsammans?

- [ ] Ja
- [ ] Nej

Vilka andra resurser, förutom lärarguiden (och eventuellt kollegor), använde du i planering av just andragradsekvationer?

- [ ] Läroboken
- [ ] Lärobokens tillhörande lärarmaterial
- [ ] Webb-sida/sidor
- [ ] Egna tidigare lektionsanteckningar
- [ ] Annat:

Texterna i lärarguiden

Här är ett uppslag från innehållsförteckningen hos lärarguiden: I den här frågan fokuserar vi på avsnitt 1, 4, 5 och 6 (inringat i grönt). Frågor om lektionsaktiviteter och uppgiftsmaterial (Avsnitt 2 och 3) kommer senare i enkäten. Vilka avsnitt läste du och på vilket sätt?

	Läste inte alls	Skummade igenom / Läste översiktligt	Läste ganska noggrant	Läste mycket noggrant
Avsnitt 1 - Tidigare forskning om elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer	☐	☐	☐	☐
Avsnitt 4 - Fördjupande kommentarer kring undervisning av andragradsekvationer baserat på lärarerfarenhet	☐	☐	☐	☐
Avsnitt 5 - Andragradsekvationer i en svensk gymnasiekontext	☐	☐	☐	☐

Hur värdefullt var varje avsnitt för dig när du skulle planera undervisning om andragradsekvationer?

	Inte alls värdefullt	Lite värdefullt	Ganska värdefullt	Mycket värdefullt
Avsnitt 1 - Tidigare forskning om elevers lärande och undervisning av andragradsekvationer	☐	☐	☐	☐
Avsnitt 4 - Fördjupande kommentarer kring undervisning av andragradsekvationer baserat på lärarerfarenhet	☐	☐	☐	☐
Avsnitt 5 - Andragradsekvationer i en svensk gymnasiekontext	☐	☐	☐	☐

Sökte du upp någon av artiklarna från referenslistan (Avsnitt 6)?

☐ Ja

☐ Nej

Ta ställning till följande påståenden om texten i de avsnitt du läste i lärarguidens avsnitt 1, avsnitt 4, och avsnitt 5.

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Texten var skriven på ett sätt så att det var lätt att förstå vad som menades.	☐	☐	☐	☐	☐
Texten var skriven på ett lämpligt sätt för mig som lärare.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag upplevde att texten försökte styra mig till hur jag ska undervisa.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag upplevde att texten gav frihet till mig att välja själv hur jag ska undervisa.	☐	☐	☐	☐	☐
Det var lätt att följa med i de matematiska resonemangen i texterna.	☐	☐	☐	☐	☐
Det fanns matematik beskriven i texterna som jag inte förstod.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag kände igen det som stod i texterna från min egen lärarerfarenhet.	☐	☐	☐	☐	☐
Texterna tillförde ingenting nytt till mig som jag inte redan visste.	☐	☐	☐	☐	☐

Lektionsaktiviteterna

Nu kommer frågor om ditt användande av lärarguidens förslag på lektionsaktiviteter. Aktiviteterna fanns beskrivna i Avsnitt 2, och fanns i sin helhet i Bilaga 1. Planerade du in och använde någon av dessa aktiviteter i din undervisning?

	Nej, Inte alls	Ja, men med modifieringar, t.ex. tog bort uppgifter, eller bara genomförde delar av aktiviteten.	Ja, mer eller mindre som det föreslagna genomförandet
Aktivitet 1 - Introduktion av andragradsekvationer	☐	☐	☐
Aktivitet 2 - Identifiera typer av andragradsekvationer och lös tillsammans	☐	☐	☐
Aktivitet 3 - Diskriminanten	☐	☐	☐
Aktivitet 4 - Olika lösningsmetoder	☐	☐	☐
Aktivitet 5 - Identifiera och rätta till vanliga misstag	☐	☐	☐

Vad var anledningen/anledningarna till att du planerade och genomförde den/de aktiviteten/aktiviteterna du markerat?

Vad var anledningen/anledningarna till att du modifierade den/de aktiviteten /aktiviteterna du markerat?

Nu kommer några påståenden om användandet av lektionsaktiviteterna. Ta ställning till följande.

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Om jag haft mer lektionstid för andragradsekvationer hade jag använt fler av lektionsaktiviteterna.	☐	☐	☐	☐	☐
Om jag haft mer planeringstid för andragradsekvationer hade jag använt fler av lektionsaktiviteterna.	☐	☐	☐	☐	☐
Det tog mycket av min planeringstid att läsa in mig på lektionsaktiviteternas syfte och genomförande.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag sparade in mycket planeringstid genom att använda de färdiga lektionsaktivitetsförslagen.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag planerade och genomförde egna lektionsaktiviteter, utöver eller istället för de föreslagna, på grund av vad jag läste i guiden.	☐	☐	☐	☐	☐

Här kommer påståenden om lärarinformationen till lektionsaktiviteterna. Ta ställning till följande:

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Lärarinformationen till lektionsaktiviteterna var lätt att förstå.	☐	☐	☐	☐	☐
Lärarinformationen till lektionsaktiviteterna var hjälpsam för att genomföra aktiviteterna i klassrummet.	☐	☐	☐	☐	☐
Lärarinformationen till lektionsaktiviteterna stöttade mig i att hantera helklassdiskussioner.	☐	☐	☐	☐	☐
Lärarinformationen till lektionsaktiviteterna stöttade mig i hur jag kunde justera eller modifiera lektionsaktiviteterna för att passa mig och min undervisning.	☐	☐	☐	☐	☐

Uppgifterna

Nu kommer frågor om uppgiftsmaterialet, som fanns beskrivet i Avsnitt 3, och i sin helhet i Bilaga 2. Använde du något av uppgiftsmaterialet från lärarguiden i undervisningen?

	Nej, använde inte alls	Ja, använde det
Uppgifter från frisläppta nationella prov	☐	☐
Utmanande uppgifter	☐	☐
Lathund för olika typer av ekvationer och deras lösningsmetoder	☐	☐
Exit tickets	☐	☐

Hur använde du uppgifterna från frisläppta nationella prov?

- [ ] Som övningsuppgifter för samtliga elever att arbeta med
- [ ] Som övningsuppgifter för någon/några enstaka elever att arbeta med
- [ ] Som demonstration i helklass (t.ex. lösa uppgifter gemensamt)
- [ ] Annat:

Hur använde du "Utmanande uppgifter"?

- [ ] Som övningsuppgifter för samtliga elever att arbeta med
- [ ] Som övningsuppgifter för någon/några enstaka elever att arbeta med
- [ ] Som demonstration i helklass (t.ex. lösa uppgifter gemensamt)
- [ ] Annat:

Hur använde du "Lathund för olika typer av ekvationer och deras lösningmetoder"?

- [ ] Som stöd för samtliga elever att ha när de löste andragradsekvationer
- [ ] Som stöd för någon/några elever att ha när de löste andragradsekvationer
- [ ] Som demonstration i helklass
- [ ] Annat:

Hur använde du "Exit tickets"?

- [ ] I slutet av en lektion för att se vad elever lärt sig, på papper
- [ ] I slutet av en lektion, för att se vad elever lärt sig, digitalt via responssystem
- [ ] Annat sätt:

Om helheten av ditt användande

Nu börjar flera frågor om din upplevelse av stöttningen av lärarguiden i din planering och undervisnign av andragradsekvationer.

Vilka fördelar (om några) upplevde du av att ha haft tillgång till lärarguiden i samband med planering och undervisning av andragradsekvationer?

Vilka utmaningar (om några) upplevde du kopplat till lärarguiden i samband med planering och undervisning av andragradsekvationer?

Tack för det du hittills svarat!

Du kommer nu att få ta ställning till fyra sidor med några omfattande uppsättningar påståenden.

Ta ställning till följande påståenden om vilken roll lärarguiden spelat för dig genom ditt användande. Genom att använda lärarguiden....

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
...har jag ökat min egen matematiska förståelse för andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag blivit bättre på att lösa andragradsekvationer med olika metoder.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min egen matematiska förståelse om kvadratroten.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag blivit bättre på att hjälpa elever se relevansen av andragradsekvationer inom andra områden, som fysik, teknik, m.m.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min förståelse om vilka förkunskaper som elever behöver ha för att lära sig om andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min förståelse om vilka svårigheter elever kan ha när de lär sig om andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag blivit bättre på att förutse elevers tänkande om andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag blivit bättre på att formativt undersöka elevers kunskaper.	☐	☐	☐	☐	☐

Ta ställning till följande påståenden om vilken roll lärarguiden spelat för dig genom ditt användande. Genom att använda lärarguiden....

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
...har jag fått nya sätt att förklara andragradsekvationer på.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min uppsättning lektionsaktiviteter för att undervisa om andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag fått nya idéer om lektionssaktiviteter som jag tar med mig till andra matematiska områden.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag blivit bättre på att hantera klassrumsdiskussioner.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag blivit bättre på att förklara den historiska utvecklingen av andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min förståelse om hur andragradsekvationer behandlas i en svensk gymnasiekontext.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min förståelse om vilka förväntningar som ställs på elevers kunskaper om andragradsekvationer i nationella prov.	☐	☐	☐	☐	☐
...har jag ökat min förståelse om hur andragradsekvationer relaterar till andra matematiska områden.	☐	☐	☐	☐	☐

Ta ställning till följande påståenden om stöttningen i planering och undervisning.

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Att ha tillgång till lärarguiden i samband med planering och undervisning av andragradsekvationer gjorde min planering bättre än om jag inte haft tillgång till den.	☐	☐	☐	☐	☐
Att ha tillgång till lärarguiden i samband med planering och undervisning av andragradsekvationer gjorde min undervisning bättre än om jag inte haft tillgång till den.	☐	☐	☐	☐	☐
Att läsa lärarguiden hjälpte mig fokusera på och reflektera kring vad som är viktigt i undervisning och lärande av andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag kunde använda mig av sådant jag läste i lärarguidens texter i undervisningen, till exempel när jag skulle förklara något eller svara på elevers frågor under genomgång eller i diskussion med elever.	☐	☐	☐	☐	☐

Ta ställning till följande påståenden om stöttningen av din lärarprofessionalitet.

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Användandet av lärarguiden ökade min lust för undervisningen.	☐	☐	☐	☐	☐
Genom att läsa lärarguiden fick jag bekräftat sådant som jag vet från erfarenhet av att undervisa andragradsekvationer.	☐	☐	☐	☐	☐
Genom att använda lärarguiden blev jag stärkt i min professionalitet som lärare.	☐	☐	☐	☐	☐
Lärarguiden stöttade mig i att undervisa på ett sätt som jag vill undervisa på.	☐	☐	☐	☐	☐

Ta ställning till följande påståenden om inramningen av studien och forskningsanknytningen.

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Att lärarguiden kom som en del av ett forskningsprojekt gjorde att jag använde den mer än jag skulle gjort annars.	☐	☐	☐	☐	☐
Att lärarguiden kom från forskare från ett universitet gjorde att jag litade på innehållet mer än jag skulle gjort annars.	☐	☐	☐	☐	☐
Att lärarguiden innehöll en sammanställning av tidigare forskning om andragradsekvationer var viktigt för att jag skulle vilja ta del av den.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag hade velat få tydligare rekommendationer i lärarguiden om vilken undervisning som är bäst att genomföra.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag upplevde att jag efter att ha läst lärarguiden undervisat andragradsekvationer på vetenskaplig grund mer än tidigare.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag upplevde att jag efter att ha läst lärarguiden undervisat andragradsekvationer på beprövad erfarenhet mer än tidigare.	☐	☐	☐	☐	☐

Nu kommer några sista frågor om vad sådana här lärarguider skulle kunna tillföra i stort.

Finns det något nytt som lärarguiden bidragit med som du inte sett i någon annan resurs? I sådana fall vad?

Finns det något annat matematiskt område inom någon kurs på gymnasiet där en liknande guide skulle vara till nytta? I sådana fall vilket/vilka område(n)?

Ta ställning till följande påståenden om ett eventuellt framtida användande av den här typen av lärarguider.

	Instämmer inte alls	Instämmer till viss del inte	Varken instämmer eller instämmer inte	Instämmer till viss del	Instämmer helt
Om en sådan här lärarguide hade funnits tillgänglig för mig för varje matematiskt område inom gymnasiets kurser hade det varit värdefullt för mig när jag planerar.	☐	☐	☐	☐	☐
Om en sådan här guide hade funnits tillgänglig för mig för varje matematiskt område inom gymnasiets matematikkurser hade jag läst i alla fall delar av den för varje område.	☐	☐	☐	☐	☐
Jag hade gärna haft ett organiserat kollegialt samarbete kring en sådan här lärarguide som fortbildning.	☐	☐	☐	☐	☐

Du har angett att du inte använt guiden. Vilka andra resurser använde du i planering av just andragradsekvationer? (Flera val möjliga)

- [ ] Lärobok
- [ ] Lärobokens tillhörande lärarmaterial
- [ ] Webb-sida/sidor
- [ ] Egna tidigare lektionsanteckningar
- [ ] Annat:

Vilket av följande passar bäst i som anledning till varför du inte använde guiden?

- [ ] Lärarguiden tillförde ingenting nytt till mig som jag inte redan visste
- [ ] Lärarguidens erbjudna innehåll fanns redan i resurser jag har tillgång till
- [ ] Lärarguidens innehåll var ointressant för mig
- [ ] Lärarguidens innehåll hade låg kvalitet
- [ ] Jag hade inte tid att läsa guiden
- [ ] Annat skäl

Hur hade lärarguiden kunnat varit utformad, och vad skulle den innehållit, för att du skulle ha haft nytta av den?

Upptäckte du några felaktigheter i lärarguiden eller dess bilagor som borde åtgärdas?

- [ ] Ja
- [ ] Nej

Om ja, vilka felaktigheter?

Finns det något du skulle vilja lägga till som du inte fått möjlighet att ge din syn på i någon tidigare fråga?

Kan du tänka dig att bli tillfrågad om att bli intervjuad för att fördjupa förståelsen kring dina svar och ditt användande (eller icke-användande)?

- ☐ Ja
- ☐ Nej

Är du intresserad av att ansvariga forskare kontaktar dig i framtiden via kontaktvägen i form av din mailadress för att fråga dig om deltagande i en eventuell uppföljande studie?

- ☐ Ja
- ☐ Nej

Det var sista frågan!

När du är färdig, klicka på "Skicka nu" för att skicka in dina enkätsvar.

Design of a topic-centered research-based teacher guide as support for teachers' planning and teaching, and professional learning

This thesis presents a design research project, comprising five papers on the design and implementation of a topic-centered research-based teacher guide for quadratic equations in Swedish upper-secondary school. The thesis aims to explore if and how such teacher guides can be designed to support mathematics teachers in their planning and teaching, and their professional learning. Further, it examines how teachers and their contexts affect conditions for such support.

The papers investigate teachers' existing resource use when planning, previous research on quadratic equations, the design of the teacher guide, and the support found through teachers' interactions with the teacher guide in two cycles of implementation.

The findings provide empirical insights into teachers' use of teacher guides, and further suggest that teacher support will be most effective when designed features meet the needs of teachers within their context. For Swedish upper-secondary teachers, this was found to include providing suggestions for lesson activities with rationale, grounded in implications emerging from issues found in research, rather than providing student tasks alone. The designed teacher guide constitutes a practical contribution for teaching quadratic equations.

ISBN 978-91-7867-697-2 (print)

ISBN 978-91-7867-698-9 (pdf)

ISSN 1403-8099

DOCTORAL THESIS | Karlstad University Studies | 2026:25