Docentföreläsningar i Matematikens didaktik

Karlstads universitet 12 juni 2019

Jorryt van Bommel och Yvonne Liljekvist

Department of Mathematics
and Computer Science

Working Papers in
Mathematics Education

Karlstad University | 2019:1

Docentföreläsningar i Matematikens didaktik

Karlstads universitet 12 juni 2019

Jorryt van Bommel och Yvonne Liljekvist

Department of Mathematics and Computer Science

Working Papers in Mathematics Education | NR 2019:1

Docentföreläsningar i Matematikens didaktik - Karlstads universitet 12 juni 2019

Jorryt van Bommel och Yvonne Liljekvist

Working Papers in Mathematics Education | 2019:1

urn:nbn:se:kau:diva-75896

ISBN 978-91-7867-084-0 (pdf)

© Författarna

Distribution:
Karlstad University
Department of Mathematics and Computer Science
651 88 Karlstad
054 700 10 00

Print: Universitetstryckeriet, Karlstad 2019

WWW.KAU.SE

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FÖRORD 3

FÖRST VISSTE JAG INGENTING MEN NU KAN JAG ALLT! 5

”PIF” 6
NALLAR PÅ EN SOFFA 7
Vad är rätt? 8
Representationsform och systematik 9
DIGITALA NALLAR 10
FRÅN ATT LÖSA PROBLEM TILL ATT SKAPA PROBLEM 11
ELEVENS RÖST 12
SPRIDNING AV FORSKNING 13
REFERENSER 14
ATT LÄSA MER 14

”VI PRATAR MER MATTE NUFÖRTIDEN – INTE BARA JAG SOM HAR SVAREN” 15

ALGEBRA EN HÖRNSTEN – MEN NÄR BÖRJA MED DET? 15
ALGEBRA I HELA GRUNDSKOLAN UTMANAR TRADITIONEN 16
MODELLER SOM GER MÖJLIGHET TILL KOMMUNIKATION OCH RESONEMANG 16
LÄRARE SAMTALAR OM ALGEBRA 17
LIKHET OCH GENERALISERING – TVÅ ASPEKTER SOM LYFTS 18
HUR UNDERVISA? KOLLEGIALT STÖD OCH STÖD FRÅN SKOLLEDNING 19
”PRATA MATTE” 20
MATEMATIKUPPGIFTER 20
ATT UTVECKLA UNDERVISNINGEN – LÄRARE OCH FORSKARE 21
REFERENSER 23

DET GRÄNSLÖSA LÄRARRUMMET DÄR LÄRARE FORTBILDAR VARANDRA 25

AKTIVITETSMÖNSTER 26
INTERAKTIONSMÖNSTER 27
INNEHÅLL I FRÅGOR OCH ERBJUDANDEN 27
PROFESSIONELLT KOLLEGIALT LÄRANDE 28
VARFÖR ENGAGERAR SIG LÄRARNA? 29
REFERENSER 30
FLER TEXTER FRÅN PROJEKTET: 30

Förord

I denna del av rapportserien *Working Papers in Mathematics Education* publiceras de föreläsningar som utgjorde Jorryt van Bommels och Yvonne Liljekvists docentföreläsningar. De hölls vid ett välbesökt evenemang i juni 2019, som arrangerades av Institutionen för matematik och datavetenskap vid Karlstads universitet, där studenter, lärare, lärarutbildare, doktorander, forskare, släkt och vänner deltog. De flesta kom från Karlstad med omnejd, men några mer långväga gäster närvarade också.

I den första föreläsningen beskriver Jorryt ett av sina forskningsprojekt - Problemlösning i förskoleklass - som har legat till grund för docenturen. Hon beskriver projektets resultat och utmaningarna med att utföra ett projekt med unga barn, och blickar sedan framåt genom att visa hur forskningsresultat kan spridas i olika arenor.

Den andra föreläsningen tar sin utgångspunkt i Yvonnes forskning och diskuterar hur undervisningstraditionen i matematik har förändrats, vilket ställer nya krav på lärare. Föreläsningen avslutas med förslag till nya forskningsprojekt där lärare och forskare kan arbeta tillsammans för att utveckla matematikundervisningen.

Slutligen höll Jorryt och Yvonne en föreläsning tillsammans, där de redogjorde för resultat i ett gemensamt forskningsprojekt, som handlar om lärares informella lärande via sociala medier.

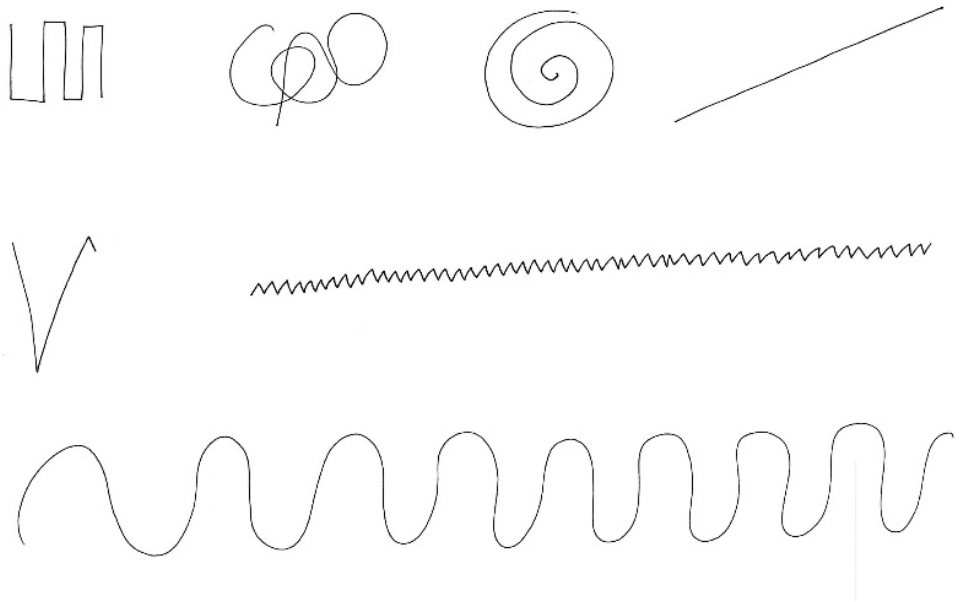
Trevlig läsning!

Först visste jag ingenting men nu kan jag allt!

Jorryt van Bommel

> Denna föreläsning annonserades med följande text: *Den matematikundervisning elever möter påverkar vilken matematik de ges möjlighet att lära och även, minst lika viktigt, vad de lär sig att matematik är, hur matematikundervisning går till samt hur de ser på sin egen förmåga att lära matematik. Möjligheterna med att undervisa matematik i förskoleklass genom problemlösning presenteras genom elevernas, lärarnas och forskarnas reflektioner.* Viss bearbetning av presentationen har gjorts för att anpassa den till det skrivna textformatet. Några bilder har tagits bort, men förhoppningen är att texten fångar innehållet som presenterades den 14 juni 2019.
>
> *Författaren*

En vecka efter att jag hade blivit utnämnd till docent, satt jag på mitt arbetsrum och skissade på följande:



Figur 1. Docenten Jorryt ritar

En av mina kollegor kom förbi, skrattade och frågade: ’Så, är det detta en docent gör hela dagarna?´. Faktum är att skissen föregicks av en

timmes möte med en annan forskare, och att den timmen föregicks av flera års forskning med samma forskare.

För att förklara det hela behöver vi gå tillbaka till 2013, när jag var nydisputerad. Under doktorandtiden hade jag mest arbetat på egen hand. Visserligen var det ett projekt i nära samarbete med andra lärarutbildare, men datainsamlingen, analysen, formulera och dra slutsatser och, till slut, skriva vetenskapliga texter var ett ensamt arbete. När jag hade disputerat beslöt jag därför för att hitta möjligheter till samarbete med andra forskare. Vid någon träff bestämde Hanna Palmér, också hon nydisputerad, och jag oss för att sätta igång ett mindre projekt kring de yngre barnens matematik. Vi var båda två intresserade av att göra praktiknära forskning och ville se om problemlösning kunde vara ett sätt att närma sig matematiken i förskoleklass.

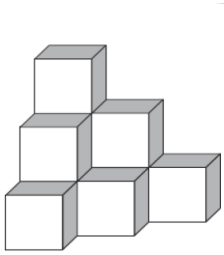
Förskoleklass institutionaliserades 1998 i Sverige, men då utan läroplan. Ämnet matematik hade inte heller någon tydlig plats från början. När vi startade vårt projekt, 2014, så fanns det fortfarande inte någon läroplan för förskoleklass och dess matematikinnehåll. Nu, 2019, har förskoleklass en egen del i läroplanen, där problemlösning tydligt finns med som ett spår.

”PiF”

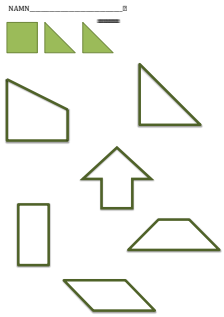
PiF – Problemlösning i förskoleklass – har genomgått många cykler och till att börja med så var det Hanna och jag som höll i lektionsmoment i olika förskoleklasser. Vi skapade och testade olika uppgifter. Utmaningen var att eleverna skulle kunna lösa uppgifterna även om de inte kunde läsa och skriva än. Vidare ville vi inte ha uppgifter där räknandet var i fokus men ville vi utmana eleverna och introducera matematiska områden som vanligtvis inte behandlas i förskoleklass. Kombinatorik och geometri var några av de matematiska områden som eleverna fick upptäcka. Några av de uppgifter som testades i klasserna finns i figur 2 nedan.

På hur många olika sätt kan nallarna sitta på en soffa?

Hur många kuber behövs för att bygga tornet?



Vilka figurer tror du går att lägga med de tre gröna bitar?



Hur ska man ställa mjölkpaketet, tennisbollen, tärningen, kuben och koppen så att alla sido-vyer stämmer?

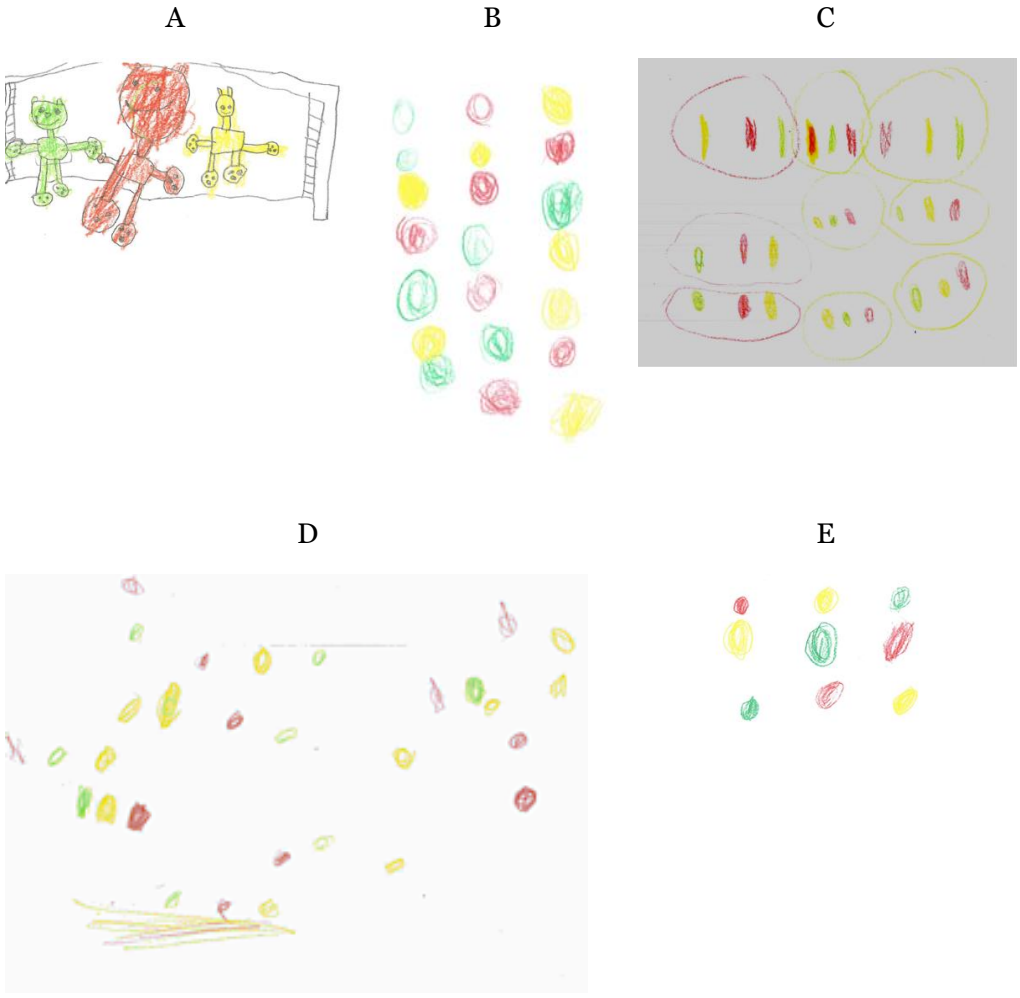
Figur 2. Exempel på uppgifter

Nallar på en soffa

Jag kommer nu att gå in på ett av problemen och då med särskilt fokus på hur eleverna dokumenterar sina lösningar. Lösningarna kan nämligen se väldigt olika ut och därför är olika aspekter av elevlösningarna intressanta att studera mer. Eftersom matematiken i uppgifterna vanligtvis görs av äldre elever, så har tidigare forskning utvecklat ramverk och analysverktyg som gäller för elevsvar och elevdokumentation från den åldersgruppen. Den utmaning vi hade var att översätta tidigare analysverktyg till sexåringarnas dokumentation.

Vad är rätt?

När det gäller antal kombinationer, så kom eleverna fram till olika svar. Vissa elever ritade bara en kombination, vilket var kombinationen som hade visats i klassen (elevdokumentation A i figur 3 nedan). Men de flesta elever hittade flera kombinationer. Ibland med dubbletter (som i bild B, C, D) och ibland utan dubbletter (lösning E). Några elever lyckades få precis alla sex kombinationer – det som anses vara det rätta svaret, men vi såg också många elever som hade ritat tre olika kombinationer, och här fick vi justera det som anses vara rätt!



Figur 3. Exempel på elevdokumentation

Tre lösningar var fullständigt rätt när man tolkade frågan så som sexåringar kan tolka den. På hur många olika sätt kan nallarna sitta på

soffan? Den matematiska tolkningen av frågan innebär att vi tar hänsyn till hur nallarna sitter i förhållande till varandra. Med en gul nalle i mitten finns det då två kombinationer, röd till vänster och grön till höger eller tvärtom: grön till vänster och röd till höger. För de sexåringar som hade tre kombinationer fanns det dock bara tre, inte fler! Dessa elever menade att ALLA nallar behövde sitta på olika ställen för att det skulle vara en ny kombination, dvs. en annan tolkning av frågan – med ett annat svar, som därför kan räknas vara rätt.

Representationsform och systematik

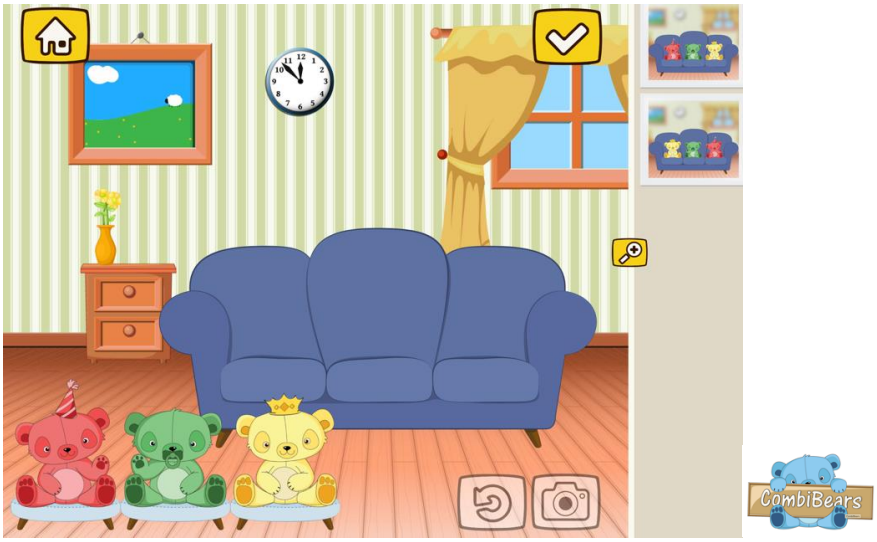
Om vi studerar vilken typ av representation eleverna använder ser vi både nallar och prickar i elevdokumentationen. Något som flera forskare tidigare har beskrivit som ”symbols and signs” (Piaget & Inhelder, 1969), som piktografisk, ikonisk samt symbolisk (Hughes, 1986), och med (halv)konkret och (halv)abstrakt (Heddens, 1986). Eftersom eleverna inte bara dokumenterar på ett formaliserat vis, redogör kategorierna ovan enbart för en aspekt av dokumentationen. Elevernas dokumentation visar också olika sätt att ta sig an problemet: det finns skillnad i strukturen och systematiken. Systematiken som elever använder i kombinatorik har tidigare beskrivits för 7-9 åringar av Lynn English (2005). Hon kom fram till följande faser: Trial and error (där eleven testar ostrukturerat), Odometer (där eleverna testar på ett strukturerat sätt), samt fasen däremellan: Transition (där eleverna börjar på ett strukturerat sätt, men inte följer den processen helt ut).

Antalet hittade kombinationer, representationsformen och systematiken var tre olika aspekter, som var och en gav oss en viss insikt i elevernas förståelse. När vi kopplade samman dessa tre aspekter kunde vi se nya saker. Det visade sig att de elever som använde prickar (halvabstrakt eller ikonisk) hade många fler dubbletter i sina lösningar än de elever som ritade nallar (Halvkonkret eller piktografisk). Dubletterna i sin tur är kopplade till hur systematiskt eleverna har försökt hitta olika kombinationer. Oftast strävar man efter att gå mot den abstrakta fasen i matematik, men i det här fallet verkade det som om det abstrakta ledde till att eleverna började lösa ett annat problem. Från att problemet var ’på hur många sätt kan tre nallar sitta på en soffa’ verkade det för några elever bli ’på hur många olika sätt kan jag rita tre prickar på

ett papper'. Prickarnas plats på pappret och avståndet mellan prickarna spelar då plötsligt roll. De eleverna som stannade kvar i den halvkonkreta fasen verkade däremot ha problemet klart för sig. Där förekom även små dialoger med de ritade nallarna 'Nu är det din tur att sitta i mitten'. En tredjedel av eleverna ritade bilder, resten ritade prickar. För att hålla eleverna lite längre i den halvkonkreta fasen behövde vi tänka om.

Digitala nallar

För att se vilka möjligheter den halvkonkreta fasen kunde erbjuda, ville vi arbeta med uppgiften på nytt. Vi strävade efter att alla elever skulle använda den halvkonkreta, piktografiska representationen, lite längre. Genom att skapa en digital version av uppgiften kunde vi erbjuda elever att arbeta i den halvkonkreta fasen. I Combibears (figur 4) fick eleverna en möjlighet att testa 'nallar på en soffa' genom att flytta (halvkonkreta) nallar. De kunde samtidigt spara sina lösningar, se dessa uppradade och gå tillbaka till lösningarna och se om de skapat en dubblett.



Figur 4. Digitala nallar

Att utveckla uppgifterna i en digital miljö visade sig erbjuda nya möjligheter för lärande. I fallet med nallarna fick några elever testa den digitala varianten och dessa elever visade ett helt annat mönster i sin dokumentation när de fick den analoga uppgiften efteråt. Färre dub-

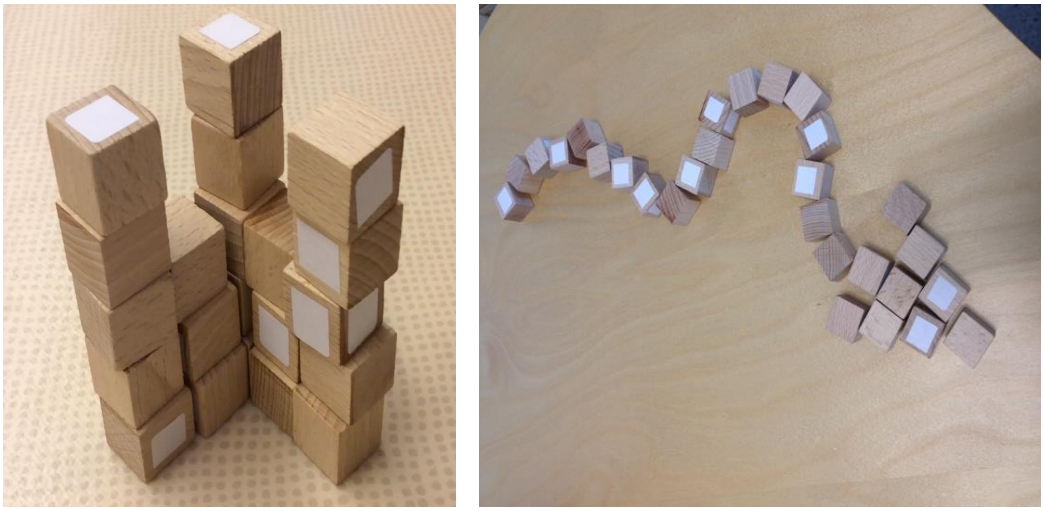
bletter och fler heltäckande lösningar. Från att bara 2% av eleverna hittade 6 lösningar när de enbart arbetade med den analoga versionen, hittade nu 20% av eleverna alla 6 lösningar. Ännu mer spännande var minskningen av förekomsten av dubbletterna, utan att någon lärare hade behövt förklara vad en dubblett är. Enbart genom att förekomsten av dubbletter markerades med en röd ram runt den redan sparade lösningen verkade barnen få en inblick i vad en dubblett var och dess (icke) roll i antalet kombinationer. Tidigare fanns det, som sagt, dubbletter i ungefär en tredjedel av alla elevdokumentationer. Nu fanns det inga dubbletter alls längre.

Det finns digitala versioner av fler uppgifter numera och olika lärande möjliggörs när man använder de två varianterna av uppgifterna parallellt.

Från att lösa problem till att skapa problem

I den senaste cykeln i vårt projekt har vi börjat lägga fokus på en annan del av problemlösning, nämligen då eleverna skapar egna liknande problem. Vad är det som eleverna skapar, vad vill de ha lika när de skapar liknande problem och vad varierar de?

I exemplet med tornet ovan (*hur många kuber behöv*s..., figur 2) har eleverna fått i uppgift att skapa egna liknande problem, efter att de har arbetat med den första tornuppgiften. Tornet, eller byggnaden de skapar, kan ibland klassificeras som ett matematiskt bygge, där kubens egenskaper har använts för att bygga (tornet till vänster i figur 5). Ibland är bygget icke-matematiskt, så som i ormen nedan. Ormen kunde lika gärna ha byggts med kapsyler, eller med andra små plockisar. Utöver byggnadens egenskaper är också själva frågan eleverna ställer intressant att klassificera. Vi kan även dela in frågorna i matematiska och icke-matematiska frågor. Matematiska och icke-matematiska byggnader förekom och till varje typ av byggnad fanns det både matematiska och icke-matematiska frågor.



Figur 5. Byggnader skapade av elever

Till ormen (till höger i figur 5), den icke-matematiska byggnaden, ställde eleven följande *matematiska* fråga: ”Hur många fler kuber behövs till ormen om ormens svans består av 37 kuber?”. Till den matematiska byggnaden nedan ställde eleven en *icke-matematisk* fråga: ”Hur ska man göra för att den ska rasa?”. Att formulera liknande problem tolkades således på olika sätt – ibland var det bygget som var likt, ibland frågan och ibland båda två.

Elevens röst

Elevens röst har varit viktigt för oss – vad tycker de och hur upplever de lektionerna? Vad kommer de ihåg? Vi genomförde därför korta intervjuer med varje elev – vad kom de ihåg, och tyckte de att de hade lärt sig något? Någon elev svarade ”Jag kommer inte ihåg men jag vet att jag har lärt mig något” och en annan elev svarade att hon hade lärt sig att matte verkar roligt. Några elever beskrev sitt lärande på följande sätt: ”Att man kan tänka på ett annat sätt”, eller mera generellt: ”jag har lärt mig att tänka”. När vi frågade mer, berättade eleverna att de menade att de kunde tänka vidare även om man redan hade klurat ut svaret, att det kanske fanns ett till svar. Och sen som titeln på det här föredraget, en elev som sa ”Först visste jag ingenting, men nu kan jag allt”.

Spridning av forskning

Forskningsresultat kan spridas och förmedlas på olika sätt (se listan nedan). Förutom några forskningsartiklar och konferensbidrag har vi även utvecklat flera digitala varianter av uppgifterna som används både i förskoleklass, på förskolan och i högre årskurser. Vi har skrivit några populärvetenskapliga böcker och artiklar för lärarstudenter och förskoleklasslärare. Och så har vi fått möjligheten att skriva egna problemlösningsuppgifter till elevböcker – som till exempel i figur 1 där eleverna ska försöka hitta ett sätt att rangordna längden på strecken i figuren. Eftersom det inte finns någon given metod för att lösa uppgiften behöver en elev bland annat använda sin problemlösningsförmåga. Uppgiften är en produkt av den forskning vi bedriver. På så sätt påverkar vår forskning direkt de som vi vill påverka: eleverna!

Så tillbaka till frågan och figur 1: är det detta en docent gör hela dagar? Ja faktiskt, det är precis det en docent gör – eller det är åtminstone det som den här docenten vill göra framöver!

Referenser

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. I G. A. Jones (Red.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Mathematics Education Library, *40*, Springer the Netherlands.

Heddens, J.W. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *The Arithmetic Teacher, 33*(6), 14-17.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. New York: Basic Books.

Att läsa mer

https://www.kau.se/matematik/forskning/pif

https://apparjorryt.hotell.kau.se

Palmér, H., & van Bommel, J. (2018). Problem solving in early mathematics teaching: A way to promote creativity? *Creative Education, 9*, 1775-1795

Palmér, H., & van Bommel, J. (2018). The role of and connection between systematization and representation when young children work on a combinatorial task. *European Early Childhood Education Research Journal, 26*(4), 562-573, doi: 10.1080/1350293X.2018.1487141

van Bommel, J., & Palmér, H. (2018). Enhancing young children's understanding of a combinatorial task by using a duo of digital and physical artifacts. *Early Years*. doi:10.1080/09575146.2018.1501553

Palmér, H., & van Bommel, J., (2016). *Problemlösning som utgångspunkt: Matematikundervisning i förskoleklass*. Stockholm: Liber ISBN 978-91-47-11715-4

”Vi pratar mer matte nuförtiden – inte bara jag som har svaren”

Yvonne Liljekvist

> Utgångspunkten för denna text är den populärvetenskapliga docentföreläsning jag genomförde i juni 2019 vid Karlstads universitet. Föreläsningsmanuset har endast genomgått en lättare bearbetning och referenser har lagts till. Vid föreläsningen använde jag även bilder för att göra det intressantare för den månghövdade åhörarskaran. Rubrikerna motsvarar i allt väsentligt det som stod i bildspelet, men bilderna kan av upphovsrättsliga skäl inte vara med i den här publikationen. Det är dock min förhoppning att läsaren trots detta får viss behållning av texten.
>
> *Författaren*

Undervisningstraditionen i grundskolans matematik håller på att förändras. Lärare söker efter metoder och modeller för att undervisningen ska ge bättre möjligheter till kommunikation om och med matematik. Föreläsningen tar sin utgångspunkt i forskning om grundskolans algebraundervisning för att visa möjligheter och utmaningar i den förändrade undervisningstraditionen.

Algebra en hörnsten – men när börja med det?

Algebraiskt tänkande anses vara en hörnsten när elever ska utveckla sin matematiska förmåga (Kieran, 2018). Det innebär att undervisningen i matematik för de yngre eleverna behöver innehålla uppgifter och aktiviteter, som ger dem möjlighet att upptäcka algebraiska strukturer. Här handlar det givetvis om enkla strukturer som till exempel likhet, olikhet, enklare ekvationer och proportionalitet. Denna kunskap har påverkat innehållet i styrdokumenten i svensk grundskola, och sedan 2011 är algebra tydligt framskrivet som ett område som matematikundervisningen ska innehålla redan från lågstadiet.

Traditionellt sett har algebra i många länder, även Sverige, setts som ett område som eleverna kan vänta med. Det har typiskt introducerats i högstadieåldern och har heller inte alltid setts som ett matematiskt innehåll som passar för alla elever att ta del av. Men studier under de senaste decennierna visar att elevers matematiklärande gynnas av om de börjar jobba med algebraiska strukturer och generaliseringar parallellt med att de utvecklar sin aritmetiska kunskap. Det är vanligt att vi inom matematikdidaktiken kallar detta för pre-algebra för att visa att det är en del i progressionen i elevers matematiklärande. Tanken är att synliggöra vilka aspekter som är viktiga för elever i deras väg mot att förstå mer formell algebra.

Algebra i hela grundskolan utmanar traditionen

Maria Blanton och kollegor kallar sådana strukturer för ”Big ideas” och de lyfter fram att likhet, uttryck, ekvationer och olikheter, generaliserad aritmetik, funktionstänkande, proportionellt resonemang och variabler är matematiska idéer som elever behöver möta genom hela grundskolan (Blanton, et al., 2015). Det handlar om att även de yngsta eleverna kan använda algebraiska idéer och representationsformer för att lösa uppgifter och förklara matematiska samband.

Man kan givetvis diskutera om detta verkligen är viktigt för alla elever i grundskola och gymnasieskola. Men argumentet här är att matematikundervisning som inte innehåller möjligheter för eleverna att börja upptäcka matematikens struktur och mönster inte heller kommer stötta elever att utveckla smarta strategier och tankeverktyg för att förstå vårt komplexa samhälle. Det handlar om att undervisningen behöver gå djupare in i matematiken (givetvis på en lämplig nivå) och inte endast låta eleverna studera aritmetik, ”räkna”, med fokus på flyt, snabbhet och rätta svar. Inte för att ”räknandet” inte är viktigt, för det är det! Men det räcker inte för att elever ska få syn på matematikens struktur och mönster.

Modeller som ger möjlighet till kommunikation och resonemang

Att fokusera matematikundervisningen på procedurer är ett tveeggat svärd. Elever behöver å ena sidan få tid att öva upp sin procedurella

förmåga, lära sig tabeller osv. för att avlasta sitt arbetsminne när de löser matematiska problem. Men om undervisningen fokuserar på det i alltför hög grad, kommer flertalet elever inte få möjligheten att förstå vad matematik handlar om. De kommer ge upp och tänka att de inte fattar och att matematik inte är något för dem. Det handlar om att också utveckla en förmåga att resonera runt och kommunicera om och med matematik. Dessa aspekter av matematikundervisning och matematiklärande har påverkat hur styrdokumenten ser ut – även generella förmågor lyfts fram som viktiga syften för undervisningen.

Matematiklärare i skolan vet om detta. Intentionerna på formuleringsarenan (dvs. i styrdokument och läromedel) omsätts av lärare i skolan på det vi kan kalla en realiseringsarena (Hemmi et al., 2018). Men lärare, kanske särskilt i grundskolans tidigare år, är även fundersamma över hur de ska tolka kursplanernas intentioner för att undervisa *alla* elever i algebra. Lärares kunskap och deras attityder till matematik och matematikundervisning spelar stor roll för hur undervisningen kommer att utföras. Men det handlar också om vilka resurser lärare har tillgång till vad gäller att planera, genomföra och följa upp undervisningen.

Lärare samtalar om algebra

Nu kommer jag fortsätta föreläsningen med att berätta om en studie som jag gjort tillsammans med kollegor vid Göteborgs och Uppsala universitet Cecilia Kilhamn och Kirsti Hemmi (se även Hemmi et al.,2018). Vi undersökte hur lärare i grundskolan pratar om algebrans plats i skolmatematiken och vilken relation de själva har till algebra och att undervisa algebra. Det är ett exempel på hur matematikdidaktisk forskning går till för att vi ska få mer kunskap om hur vi ska göra matematikundervisningen ännu bättre för våra elever. Exemplet algebra är, som nämnts tidigare, särskilt intressant att undersöka eftersom det är ett centralt innehåll i matematiken, som inte tidigare varit så tydligt framskrivet i svensk skola.

I studien har lärare intervjuats i så kallade fokusgrupper. Det innebär att vi som forskare inte är intresserade av enskilda lärare, utan av att

skapa en bild av hur lärare som grupp resonerar. I studien ingår lärare från olika skolor och från alla grundskolans år.
Det vi var intresserade av att ta reda på var vad som blev synligt genom lärarnas samtal vad gäller matematiskt innehåll, vilka material de använde och hur de planerade osv. Men vi var också nyfikna på hur undervisningen beskrevs och vad som var en fråga för undervisningsutveckling. Porträtterades undervisningen som enkel-komplex, statisk- dynamisk, självklar- oklar.

Vi utgick därför från analytiska frågor från en forskare som heter Judith Warren Little (2002), som studerat lärares samtal på skolan, i lärarrum och i olika möten. På det sättet kunde vi analysera samtalen för att kunna beskriva hur lärare relaterar sin undervisning till styrdokument, beskriva hur de interagerar med olika resurser för att utveckla algebraundervisningen, osv. Den här föreläsningen ger en glimt av några av resultaten.

Likhet och generalisering – två aspekter som lyfts

När lärare pratar om ”Big ideas” (Kommer ni ihåg? Maria Blanton och kollegor, som jag nämnde tidigare? dvs. likhet, uttryck, ekvationer och olikheter; generaliserad aritmetik; funktionstänkande; proportionellt resonemang och variabler), så lyfter de upp vikten av att eleverna förstår likhet; likhetstecknets funktion och betydelse. Detta är särskilt viktigt för lågstadieeleverna, och lärare för högstadieeleverna pekade på att elever som i sexan-sjuan inte förstått likhet som matematiskt begrepp och struktur, kommer att få svårt att komma vidare i matematiken. Detta kan låta som ett trivialt resultat. Men det handlar om att undervisningen behöver ge elever möjlighet att förstå begreppet likhet, och att procedurellt lärande inte räcker. Lärare söker istället efter olika typer av uppgifter där eleverna måste tänka till och inte bara räkna på. Det handlar dels om olika metaforer och modeller för att visa likhet, som vågmodellen, dels om olika typer av öppna utsagor och uttryck.

En mer avancerad matematisk tanke är den om generalisering, som lärare beskriver som en av de svåraste sakerna som eleverna behöver ta sig an. Ofta beskriver lärare det i samband med att eleverna arbetar med olika former av mönster, där det är relativt enkelt för dem att se

”nästa steg”, men att formulera en generell regel som beskriver hur mönstret växer är avancerat. Progressionen här som lärare beskriver handlar om att gå från att muntligt kunna beskriva mönstret (t.ex. utifrån en skiss) till att erövra och använda variabelbegreppet och matematiska symboler och representationsformer.

Hur undervisa? Kollegialt stöd och stöd från skolledning

När lärare pratar om algebraundervisning och hur det ska införlivas i undervisningen för alla elever på grundskolan, uttrycker många lärare för de tidigare åren en viss osäkerhet. Det handlar om att de själva känner sig osäkra på sin matematiska kunskap. Men parallellt med det visar de en vilja till att utveckla sin undervisning. De använder då olika typer av resurser för att planera undervisningen. Det handlar till exempel om lärarhandledningar, elevböcker och resursmaterial från olika aktörer som NCM eller Skolverket. Men många uttrycker också ett problem i att hinna förbereda och följa upp undervisningen. Beroendet av läromedlets innehåll och upplägg blir därmed större och flera lärare efterlyser mer utförliga lärarhandledningar. Samtalen visar också att innehållet och typen av uppgifter som förekommer i nationella proven styr vilka aktiviteter och uppgifter som undervisningen innehåller.

Johan Prytz visar i sina studier att algebra traditionellt sett är svagt beskrivet i svenska styrdokument (se t.ex. Prytz, 2015). Det betyder att lärare behöver andra resurser och stöd för att genomföra undervisningen. I den här studien ser vi att också de lokala förhållandena är viktiga. Det gäller t.ex. hur lärare samarbetar över ålderskurser och skolor, för att skapa en tydligare progression. I de skolor där lärare arbetar på det viset, visar lärarna en större säkerhet i vad undervisningen ska innehålla och hur algebraundervisningen kan gå till.

I de skolor där stödet från skolledare och huvudman var mer otydligt (t.ex. oklara lokala mål för hela grundskolans matematikundervisning, eller lågt deltagande i professionsutvecklande satsningar, som matematiklyftet) där talade också lärarna i mer generella termer och var mer osäkra på hur och vad undervisningen skulle innehålla. Här var osäkerheten också större om vilka former av resurser som finns tillgängliga.

”Prata matte”

Den övergripande bilden från studien är att lärare är väl medvetna om vikten av att elever möter algebra genom hela grundskolan och att lärare arbetar för att införliva innehåll motsvarande Blantons ”Big ideas” i sina lektioner. Men lärare beskriver också att det är en viss möda att finna, eller konstruera, lämpliga uppgifter och aktiviteter för algebraundervisning.

Eftersom målen i grundskolans styrdokument också handlar om att utveckla elevers generella förmågor, som resonemang och kommunikation om och med matematik, så söker de efter arbetssätt där eleverna får möjlighet att kommunicera. Det handlar om att minska mängden tyst räknande i boken och finna uppgifter och aktiviteter där eleverna behöver kommunicera.

Att ”prata matte” har därför blivit ett slags signalord som lärare använder när de beskriver sin undervisning. Det handlar om att den muntliga kommunikationen sätts i förgrunden i större utsträckning. Men även detta har en baksida. Fokusgruppsstudien visar att lärare, när de poängterar kommunikationen ”att prata matte”, inte i så stor utsträckning fokuserar på matematikens innehåll. Flera andra studier bekräftar detta mönster. Ett exempel är Rimma Nymans och Cecilia Kilhamns studie av klassrumsinteraktion i åk 6 där lärare mer verkar fokusera på själva görandet och den sociala interaktionen för att engagera eleverna i matematiken, och att själva matematikinnehållet (algebra) kom i skymundan (Nyman & Kilhamn, 2015).

Jag ser detta som tecken på att undervisningstraditionen håller på att förändras när det gäller matematikundervisningen. Men det är också en indikation på att det är enklare att finna aktiviteter som stöttar elevers ”prat” och svårare att finna uppgifter och aktiviteter som stöttar deras matematiska resonemang.

Matematikuppgifter

Om vi går vidare från fokusgruppsstudien av lärares syn på algebra i skolan, och för ett ögonblick funderar över vad som verkar vara väsent-

ligt när det gäller elevers matematiklärande. I tidigare forskningsprojekt som jag deltagit i, under ledning av Johan Lithner vid Umeå universitet, har vi undersökt egenskaper hos matematikuppgifter, som ger effektivare lärande (se t.ex. Liljekvist, 2014). Det som utmärkte sådana uppgifter var, för att hålla det kortfattat, att eleverna inte lärde sig något om de inte engagerade sig i den underliggande matematiska idén. Lithner (2008) kallar detta att engageras i kreativa matematiska resonemang. Kreativitet ska här inte förstås som genialitet, eller nytänkande, utan som att konstruera något.

Konstruktivistiska lärteorier har ju på sistone emellanåt i skoldebatten kommit att framstå som roten till allt ont inom skolan. Den bilden är milt uttryckt något onyanserad. Jag vill nog snarare påstå att t.ex. forskargruppen runt Johan Lithner har gott på fötterna när det gäller empiri från såväl klassrumsstudier som neurovetenskapliga studier, som visar att elever, för att lära sig matematik, behöver engageras i att resonera kreativt för att förstå, och därmed konstruera en förståelse av ett visst begrepp.

Om vi nu kopplar samman detta med lärares strävan efter att undervisa algebra genom aktiviteter och uppgifter som ger elever möjlighet att ”prata matte”, så behöver dessa aktiviteter ha vissa egenskaper, och lärare som orkestrerar samtalet på ett sådant sätt att matematikens struktur, mönster och ”Big ideas” blir synliga.

Att utveckla undervisningen – lärare och forskare

Det är här lärare och forskare kan arbeta tillsammans för att utveckla matematikundervisningen. Lärare och forskare har olika typer av kunskap om skolan, och om undervisning och lärande. Att basera undervisningen på systematisk kunskap från forskning kan inte göras om inte forskningens resultat omsätts till metoder, modeller, aktiviteter och uppgifter som fungerar i undervisningen och som ger eleverna möjligheter att studera och bit för bit erövra kunskaper så de kan förstå komplexa fenomen och lösa sammansatta problem.

När jag tillsammans med kollegor här på Karlstads universitet i en omfattande SCB-enkät har undersökt lärares förutsättningar för att planera, genomföra och följa upp sina lektioner, så ser vi att lärare sällan har den möjligheten i sitt vardagliga arbete (se Nordgren et al, 2019). Lärares möjligheter för att systematiskt arbeta formativt, dvs. att planera lektioner, genomföra, följa upp och därefter anpassa till nästa lektion är i praktiken mycket begränsade på flertalet skolor. Detta är ett allvarligt kvalitetsproblem för svensk skola. Lärare använder därför olika strategier för att kunna planera. Vi kommer beröra en av dem i nästa föreläsningspass om lärares användning av sociala media för att få stöttning av kollegor.

Men, i rättvisans namn ska jag även berätta att det finns undantag, dvs. skolor där lärare har tid avsatt för kollegialt arbete med att planera och följa upp undervisningen och där lärare är mer nöjda med sin arbetssituation.

Resultatet från enkätstudien visar också att många lärare är intresserade av att utveckla undervisningen tillsammans med oss forskare. Det tycker jag är glädjande för framtiden. Medel börjar också avsättas från olika finansiärer för den typen av samarbete, vilket gör att jag känner stor tillförsikt inför fortsatt forskning inom matematikens didaktik här på Karlstads universitet.

Lärare och forskare kommer att kunna kvalificera vad den förändrade undervisningstraditionen med att ”prata matte” innebär, eller behöver innebära, för att undervisningen ska vara effektiv. På samma sätt som mer kommunikativ matematikundervisning innebär att det inte bara är läraren som pratar och kommer med svaren, så kommer kommunikation och samarbete mellan lärare och forskare medföra att det inte bara är jag som forskare som har svaren.

Referenser

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87. doi: 10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Hemmi, K., Bråting, K., Liljekvist, Y., Prytz, J., Madej, L., Pejlare, J., & Palm Kaplan, K. (2018). Characterizing Swedish school algebra – initial findings from analyses of steering documents, textbooks and teachers' discourses. I E. Norén, H. Palmér & A. Cooke (Red.), *Nordic research in mathematics education, Papers of NORMA 17. The Eight Nordic Conference on Mathematics Education*, Stockholm, May 30–June 2, 2017 (pp. 299–308). Gothenburg: SMDF.

Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5-12-year-olds*. Cham: Springer.

Liljekvist, Y. (2014). *Lärande i matematik – om resonemang och matematikuppgifters egenskaper*. (Doktorsavhandling). Karlstad: Karlstad University Studies 2014:16.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Little, J. W. (2002). Locating learning in teachers' communities of practice: Opening up problems of analysis in records of everyday work. *Teaching and Teacher Education, 18*(8), 917–946. doi:10.1016/s0742-051x(02)00052-5

Nordgren, K., Kristiansson, M., Liljekvist, Y., & Bergh, D. (2019). *Lärares planering och efterarbete av lektioner: Infrastrukturer för kollegialt samarbete och forskningssamverkan*. Karlstads universitet.

Nyman, R., & Kilhamn, C. (2015). Enhancing engagement in algebra: didactical strategies implemented and discussed by teachers. *Scandinavian Journal of Educational Research, 59*(6), 623–637.

Prytz, J. (2015). Swedish mathematics curricula, 1850–2014. An overview. I K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. Prytz & G. Schubring (Red.), *"Dig where you stand" 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 309–325). Uppsala University.

Det gränslösa lärarrummet där lärare fortbildar varandra

Jorryt van Bommel och Yvonne Liljekvist

Sveriges lärare har via sociala medier tillgång till ett utvidgat, digitalt, kollegium där lärare i olika ämnen och på olika stadier utbyter erfarenheter. Men är det verkligen någon kvalitet i det som pågår? Lär man sig något? I den här föreläsningen presenteras resultat från en treårig studie där vi undersökt interaktionen i Facebookgrupper för lärare – och det finns mycket att lära!

I Sverige är det många användare av sociala medier, där Facebook är en av de plattformar som är flitigt använd. Internetstiftelsens undersökning visar att 74% av alla svenskar finns på Facebook och att 53 % dagligen är inne på Facebook (Internetstiftelsen, 2018).

Facebook används inte bara på ett personligt plan, utan även på ett yrkesmässigt. Lärare har till exempel skapat egna grupper med både generiska teman och ämnesdidaktiska teman. Det kan också vara teman kopplade till skolår eller kurser. Det innebär att en del av lärares professionella samtal numera pågår utanför lärarrummet och blir möjligt att studera.

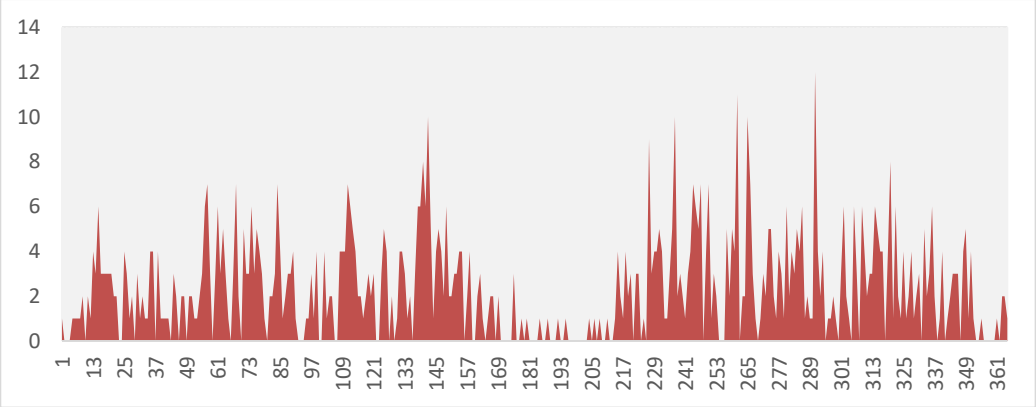
I forskningsprojektet *Fortbildning på Facebook: Lärares informella professionsutveckling via sociala medier* (VR 2015-01979) har vi studerat flera sådana grupper.

Projektet har varit indelat i flera delstudier, där vi kunnat undersöka olika aspekter av lärares användande av Facebookgrupperna (se Figur 1). Vi startade med att studera aktiviteten i tio stora öppna lärargrupper, därefter valde vi ut tre av grupperna som riktade sig till svenskalärare och tre grupper som riktade sig till matematiklärare och studerade innehållet i kommunikationen. Till sist har vi intervjuat 26 lärare som är aktiva i grupperna.

Figur 1. Schema över projektets delar.

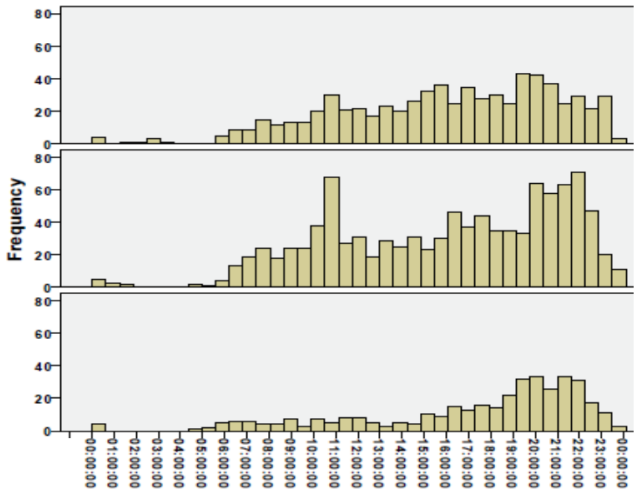
Aktivitetsmönster

Genom att räkna antalet inlägg varje dag under ett år kunde vi beskriva när lärare var aktiva i grupperna. Vi såg då att aktivitetsmönstret i grupperna statistiskt sett var lika och varierade på samma sätt (se exempel i Figur 2). Sommarledigheten syns tydligt och även andra pikar och dalar kan förklaras med skolkalendern.



Figur 2. Statusfrekvens för helår, grupp 1

Vi kunde också se när under veckan som aktiviteten var som störts (i början av veckorna) och när på dygnet lärare var aktiva i grupperna (se Figur 3).



Figur 3. Aktivitet i tre grupper under ett dygn.

Interaktionsmönster

För att undersöka mönster i interaktionen, dvs. hur lärare pratade med varandra så behövde vi använda ett teoretiskt ramverk för att beskriva deras språkhandlingar. Ramverket kallas för systemisk funktionell grammatik (se Halliday & Hasan, 2013; Holmberg & Karlsson, 2011) och handlar om att beskriva vad någon vill ha utfört med sin kommunikation. Det kan handla om att man *frågar* om något eller *erbjuder* något. Men det kan också handla om att man *påstår* något (för att sätta igång en diskussion), eller att man *uppmanar* andra att göra något.

Analysen av trådarna (dvs. ett inledande inlägg och den följande interaktionen) visade att interaktionen till stor del handlade om att fråga (och att få svar), eller att erbjuda kollegorna något. Vad är det då som lärare frågar om och vad är det som de erbjuder varandra?

Innehåll i frågor och erbjudanden

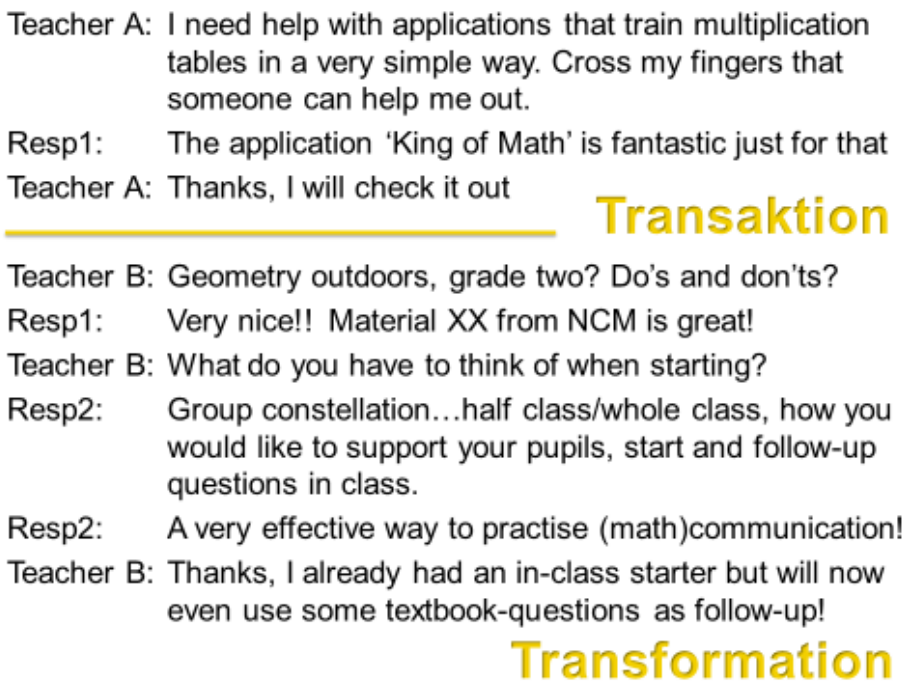
För att på ett systematiskt sätt undersöka vilken kunskap som efterfrågas och vilken kunskap som erbjöds, så använde vi oss av Lee Shulmans kategorier för att beskriva lärares professionella kunskapsbas (Shul-

man, 1987). Han kategoriserar lärares kunskaper i områden som ämnesdidaktik, ämne, pedagogik, sammanhang, syfte och mål. Analysen visade att lärarna i de grupper vi har undersökt till allra största del frågade om ämnesdidaktiska frågor, och erbjöd stöd och resurser som också kunde kategoriseras som ämnesdidaktiska.

Professionellt kollegialt lärande

Vilken nytta har då lärare av att engagera sig i Facebookgrupper för lärare? Finns det möjligheter att lära sig något? Det är inte lätta frågor att svara på om man bara analyserar trådarna i grupperna. För att kunna svara på det, så behövde vi kunna beskriva om vi kunde se tecken på att lärande skett – om vi kunde se ett ändrat beteende.

Här behövde vi skilja på om tråden visade en *transaktion* av kunskap (dvs. om någon frågade om hjälp, fick det och tackade för hjälpen), eller om det visade en *transformation* (dvs. att någon frågade om hjälp, fick det, och återkopplade på något sätt genom en reflektion kring den nya kunskapen), se exempel i Figur 4. Vi har översatt tråden till engelska för att det inte ska gå att spåra.



Figur 4. Exempel på interaktion som ger transaktion respektive transformation

När vi analyserat alla relevanta trådar, så fann vi att det i ungefär 11 % av trådarna skedde transformationer och att vi därmed kunde se att lärande skett. I ungefär 77% av trådarna skedde en transaktion. Här kan vi se att lärande möjliggörs, men vi kan inte säga om det skett.

Varför engagerar sig lärarna?

För att undersöka skälen till att lärare engagerar sig i Facebookgrupperna, så har vi intervjuat både medlemmar i grupperna och lärare som är administratörer i grupperna. Lärarna berättar att de tycker det är viktigt att dela med sig av sina kunskaper och att samarbeta med kollegor på detta sätt. De berättar också om att det finns en snabbhet i systemet – det är alltid någon kollega runt om i Sverige som är online och kan svara (kollegorna på den egna skolan har kanske inte rast samtidigt). Det är en gemenskap – som ett lärarrum – där man kan diskutera för att få djupare kunskaper i ämnet, men det kan också handla om att visa upp sig och få beröm för det man gör.

Facebookgrupperna fungerar som en nod för information och interaktion mellan lärare, och mellan lärare och andra aktörer (se Figur 5). Det har bildats ett nät – ett gränslöst lärarrum – där lärare fortbildar varandra.

Figur 5. Facebookgrupperna som en nod för information och interaktion mellan lärare

Referenser

Internetstiftelsen (2018). *Svenskarna och internet 2018* https://www.iis.se/docs/Svenskarna_och_internet_2018.pdf

Halliday, M. A., & Hasan, R. (1989). *Language, context, and text: Aspects of language in a social-semiotic perspective*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Holmberg, P., & Karlsson, A. (2006). *Grammatik med betydelse: en introduktion till funktionell Grammatik*. Uppsala, Sweden: Hallgren & Fallgren.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–21. doi:10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Fler texter från projektet:

Gillblad, E., Randahl A-C. & Olin-Scheller, C. (2019). *Discourses of writing in Facebook groups for teachers*. Paper presenterat vid ARLE, Lisbon 26–28 June, 2019

Gillblad, E., Randahl A-C. & Olin-Scheller, C. (2019). *Literacydiskurser i FB-grupper för lärare*. Paper presenterat vid Skriv! Les!, Stavanger, 7–9 May, 2019

Liljekvist, Y., Randahl, A-C., van Bommel, J., & Olin-Scheller, C. (forthcoming). *Facebook for professional development: Pedagogical Content Knowledge in the centre of teachers' online communities*

Liljekvist, Y., van Bommel, J., & Olin-Scheller, C. (2017). Professional Learning Communities in a Web 2.0 World: Rethinking the conditions for professional development. I I.H. Amzat & N.P. Valdez (Red.), *Teacher empowerment toward professional development and practices: Perspectives across borders,* 269–280. Singapore: Springer Singapore.

Liljekvist, Y., van Bommel, J., Randahl, A-C., & Olin-Scheller, C. (2019). *Multi-theoretical approach when researching mathematics teachers' professional development in self-organized online groups*. Paper presenterat vid The Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, Feb. 6–10, 2019.

Randahl, A-C. (2018) Språkhandlingar i professionella lärandegemenskaper på Facebook. I A.M. Hipkiss (Red.), *Grammatik, kritik, di-*

daktik: nordiska studier i systemisk-funktionell lingvistik och socialsemiotik. Trettonde nordiska konferensen för systemisk-funktionell lingvistik och socialsemiotik (NSFL 13), 12–13 Oktober 2017: Göteborg (ss. 117–127).

Randahl, A-C-(2018) Sharing is Caring. *Svensklärarföreningen 18*(2) 6–8

Randahl, A-C., & Olin-Scheller, C. (2018) *"All min fortbildning sker där". Ämnesinnehåll i Facebookgrupper för svensklärare*. SMDI, Linköping 22–23 november 2018

Randahl, A-C., Olin-Scheller, C., van Bommel, J., & Liljekvist, Y. (2017). Svensklärare på sociala medier: En ämnesdidaktisk analys av tre svensklärargrupper på Facebook. I B. Ljung-Egeland, C. Olin-Scheller, M. Tanner, & M. Tengberg (Red.), *Textkulturer*, 259–276. Karlstad: Karlstad University Press.

Randahl, A-C, Olin-Scheller, C., Liljekvist, Y., & van Bommel, J. (forthcoming). *Facebook as an extended staffroom and a node in Professional Learning Networks*.

van Bommel, J., & Liljekvist, Y. (2015). Facebook and mathematics teachers' professional development: Informing our community. I K. Krainer, & N. Vondrová (Red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 2930-2936. Published online: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289653

van Bommel, J., Liljekvist, Y., & Olin-Scheller, C. (2018). Capturing, managing and analyzing teachers' informal professional development on social media. I A. Engström (Red.), *Working Papers in Mathematics Education 2018:1*. Karlstad: Karlstad University, Department of Mathematics and Computer Science.

van Bommel, J., & Liljekvist, Y. (2016). *Teachers' informal professional development on social media and social network sites: when and what do they discuss?* ERME-topic conference: Mathematics teaching, resources and teacher professional development, Humboldt-Universität, Berlin, Germany, 5–7 October 2016. Published online: https://hal.archives-ouvertes.fr/ETC3/

van Bommel, J., Randahl, A-C., Liljekvist, Y., & Ruthven, K. (2020). Tracing teachers' transformation of knowledge in social media. *Teaching and Teacher Education, 87,* doi: 101016/j.tate.2019.102958

Tidigare publicerade rapporter i serien

2018:1 Jorryt van Bommel, Yvonne Liljekvist & Christina Olin-Scheller. *Capturing, Managing and Analyzing Teachers' Informal Professional Development on Social Media*

2018:2 Arne Engström. *Semiotiska perspektiv i matematikdidaktik - En introduktion*

Docentföreläsningar i Matematikens didaktik

Karlstads universitet 12 juni 2019

ISBN 978-91-7867-084-0 (pdf)

Working Papers in Mathematics Education

Karlstad University | 2019:1