Estetisk-filosofiska fakulteten

Mattias Lalin

Hur dividerar man bråk?

En studie av läroböckers hantering av multiplikation och division av bråk

Dividing fractions

A study of division and multiplication of fractions in textbooks

Examensarbete 5 poäng
Lärarprogrammet

Datum: 06-05-30
Handledare: Hugo Wikström

Sammanfattning

Undersökningar har visat att många elever har bristfälliga kunskaper i bråkräkning när de lämnar grundskolan. Eleverna har särskilt stora problem med att kunna utföra korrekta multiplikationer och divisioner med bråk inblandat. Med bakgrund av detta har jag intresserat mig för hur läroböckerna hanterar dessa frågor. Jag har därför genomfört en läromedelsanalys av två olika läroboksserier som är aktuella i undervisningen på två högstadieskolor i Karlstad. Dessa två läroboksserier är Matte Direkt år 7-9 och Matematikboken XYZ. Jag har beskrivit och analyserat de relevanta avsnitten ur instrumentella och relationella aspekter, samt även gjort en jämförelse med Margareta Löwings förslag på metod att arbeta med bråk. Löwings metodförslag syftar till att inte arbeta med bråk procedurellt, utan att arbeta på ett sätt med mål att eleverna ska förstå de matematiska operationernas verkliga innebörd.

Vad jag har upptäckt är att båda läroboksserierna gör en väldigt kortfattad behandling av Multiplikation och division av bråk, och det finns dessutom indikationer på att dessa avsnitt räknas som överkurs. Upplägget av förklaringsmodellerna skiljer sig en hel del åt i de två läroboksserierna. Matematikboken Y röd har en inledande ”diskussion” med ett bra innehåll, men då det är mycket text missgynnar det troligen lässvaga elever. Matte Direkt går mer rakt på sak och visar i de numeriska exemplen hur man ska skriva och ställa upp, vilket kan ge mig en känsla av lotsning, men har i gengäld goda konkretiserande illustrationer. Beträffande division av bråk tycker jag att Matematikboken Y röd får fram den bakomliggande idén med ”att multiplicera med inverterade värdet”, något som jag inte tycker att Matte Direkt lyckas med.

Vad jag saknar hos båda läroboksserierna är en presentation av alternativa sätt att räkna och tänka, som t ex enligt Löwings modell. Den kortfattade presentationen av avsnitten, frånvaron av alternativa lösningsmetoder, den vaga kopplingen mellan de olika uppgiftstyperna och övningsuppgifternas karaktär ger mig ett intryck av att proceduren går före förståelsen.
Detta intryck växer sig starkare hos presentationen av Division av bråk där inte en enda konkretiserande illustration finns i någon av läroböckerna. Här tycker jag definitivt att läroböckerna arbetar ur en mer instrumentell - än ur en relationell synvinkel.

Nyckelord: division av bråk, multiplikation av bråk, högstadiet, läromedelsanalys.

Abstract

Investigations have shown that many students have a deficiency in their knowledge of fractions, when they leave secondary school. Students do in particular have problems to perform correct multiplications and divisions of fractions. In the light of those earlier studies, I am interested in finding out how textbooks deal with those questions. I have carried out an analysis of textbooks. The textbooks are used in two secondary schools in Karlstad. The analysis is compared with a method of working with fractions, suggested by Margareta Löwing. The aim of her method is to make the students understand the real meaning of the mathematical operations.

The result of my investigation shows that booth textbooks gives only a short introduction of multiplication and division of fractions. The disposition of the explanations differs in the two textbooks. The first book has an introducing discussion with a relevant content. But, because of the great amount of text, it will probably be unfavourable to students with problems in reading. The second book shows more directly how to solve the numerical examples, in a way that might conduct the students too much. Though, the book has nice and concrete illustrations. The first book explains well the underlying idea of “multiplication of inverse number”, which the second book does not manage to do.

What I miss in booth textbooks, is a presentation of alternative ways of calculating and thinking when solving problems, like for example the method suggested by Löwing. The short introduction of the chapters, the lack of alternative ways of solving problems and the undefined connection between the exercises, gives me the impression that procedure is given priority to understanding.

Keywords: division of fractions, multiplication of fractions, secondary school, analysis of textbooks.

Innehåll

1. Inledning

Jag har under min lärarutbildning och även från andra håll fått information om att många elever, när de kommer upp till gymnasiet, har bristfälliga kunskaper inom den grundläggande matematiken. Bland annat har många elever dålig taluppfattning (om taluppfattning, se Grevholm, 2001, s137-139), de har till exempel svårt att rangordna decimal- och bråktal, även var för sig, i storleksordning, och de har svårt att utföra enkla matematiska operationer med talen. Detta är baskunskaper som man vill att eleverna ska ha efter genomförd grundskola. Samma problem fick jag också se när jag var ute på min lärarpraktik. På den ena av de två gymnasieskolorna som jag genomförde min praktik på, fick jag möjlighet att arbeta med en grupp på drygt tio elever som var särskilt svaga i matematik. Jag upptäckte snabbt att de flesta av dessa elever var väldigt osäkra i flera grundläggande moment, som de ovan nämnda. Flera forskningsrapporter stödjer också denna problematik.

Enligt uppnåendemålen i årskurs 9 ska eleverna ”ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform”. (Skolverket, 2000)
Tyvärr är det idag alltför många elever som lämnar grundskolan utan att ha sådana kunskaper i matematik ”som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att tolka det ökade flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället”. (Skolverket, 2000 s.26)

Mot bakgrund av detta har jag särskilt intresserat mig för bråkbegreppet, eftersom det är ett område som många elever har svårt för. Efter att ha läst Madeleine Löwings bok ”*Matematikundervisningens dilemman*” blev jag än mer intresserad av bråkbegreppet. I boken presenteras bland annat ett alternativt sätt att arbeta med bråk, ett didaktiskt upplägg där man i första hand inte arbetar med bråk procedurellt. Istället arbetar man med utgångspunkt i att få en förståelse för de matematiska operationernas verkliga innebörd.

Madeleine Löwing, lärarutbildare, med mångårig erfarenhet av klassrumsforskning och författare till nyss nämnda bok har genomfört ett test för att kontrollera grundskoleelevers kunskaper, bland annat i just bråkräkning. Hon förklarar de klena resultaten så här:

> *”Min förklaring till dessa resultat är att alltför många lärare undviker att undervisa om bråk. Istället för att göra beräkningarna i bråkform låter man eleverna översätta bråken till decimaltal och/eller utföra beräkningarna på en miniräknare. Detta gör man med stöd av flera läromedel”.* (Löwing, 2006 s.85)

Som blivande gymnasielärare i matematik vet jag att jag kommer att stöta på dessa elever som inte har tillgodogjort sig de grundläggande kunskaperna inom bråkräkning som de förväntas att ha när de börjar på gymnasiet. För att jag ska få en bättre förståelse för några av de bakomliggande orsakerna till dessa problem, så vill jag göra en läromedelsanalys, där jag studerar hur bråkräkning hanteras ur vissa aspekter i några utvalda läroböcker.
Undersökningar (se Löwing och Möllehed, teoriavsnittet) har visat att elever har särskilt svårt för multiplikationer och divisioner med bråk inblandat. Därför vill jag närmare studera hur läroböckerna hanterar dessa frågor.

Att genomföra en läromedelsanalys tycker jag idag känns särskilt relevant. På många skolor går undervisningen mot färre gemensamma genomgångar där eleverna ofta förväntas att kunna följa lärobokens instruktioner och räkna framåt på egen hand, med individuell hjälp från läraren vid behov. Löwing säger att ”I sin ambition att individualisera undervisningen väljer idag de flesta lärare att låta eleverna arbeta i sin egen takt styrda av ett läromedel”. (Löwing, 2006 s.10)

Beträffande begreppet individualisering verkar det som om många lärare inte riktigt har förstått eller insett den betydelse som under senare år har byggts upp kring detta begrepp. ”Genom att ge varje elev den tid hon behöver för att lösa respektive uppgift anser sig lärarna ha individualiserat undervisningen. De flesta av dem hade alltså valt den arbetsform som kallas hastighetsindividualisering, vilket innebär att alla elever arbetar med i stort sett samma innehåll men i individuell takt”. (Löwing, 2006 s.94) Men enbart genom att välja detta arbetssätt har man inte individualiserat undervisningen i läroplanens mening. I läroplanen står att läraren skall ”utgå från varje enskild elevs behov, förutsättningar, erfarenheter och tänkande”. (Skolverket, 2003 s.68) Det verkar alltså som många lärare anser att de har individualiserat undervisningen genom att låta eleverna arbeta i sin egen takt, även om det är i stort sett samma material de arbetar med.

Med denna lilla utvikning om individualisering vill jag i samma andetag poängtera lärarens betydelse för elevers lust att lära. ”Läraren anges samstämmigt av eleverna som den absolut viktigaste faktorn för lusten att lära”. (Skolverket, 2003 s.34) Lärarens framskjutna roll i undervisningen understryks också i skolverkets kvalitetsgranskning, genom att ”Läraren har en nyckelroll genom att i sista hand bestämma innehåll och uppläggning av matematikundervisningen i skolan”. (Skolverket, 2003b s.8) Jag vill med detta poängtera att elevers lust och förmåga att lära naturligtvis beror på fler faktorer än endast ett bra läromedel.

Mot bakgrund av ovanstående diskussion vill jag därför beskriva, analysera och jämföra böckernas hantering av bråkräkning inom följande områden:

- Multiplikation av ett bråk med ett heltal
- Multiplikation av två bråk
- Division av ett bråk med ett heltal, och vice versa
- Division av två bråk

Jag kommer också att beskriva de relevanta avsnittens layout i stort och ge några enkla kommentarer om detta.

2.Teori och tidigare forskning

2.1 Kort historik om bråk

Bråkräkningen har en lång historia bakom sig. Detta vet man bland annat genom upptäckten av den så kallade Rhindpapyren. Den upptäcktes år 1858 av en engelsman som förde rullen till London där den förvaras på British Museum. Rhindpapyren dateras så långt tillbaka som till omkring 1600-talet f.Kr, och innehåller åttiofem matematiska problem och deras lösningar. Där visar det sig att egyptierna redan vid denna tid hade en relativt väl utvecklad metod att utföra divisioner, samt addera och subtrahera bråk, även med olika nämnare. Egyptiernas behov av att matematiskt kunna hantera bråk har säkerligen uppstått genom olika praktiska problem, som till exempel att dela två kakor på 7 personer. Genom Rhindpapyren vet vi att Egyptierna löste detta problem matematiskt genom att dela dessa två kakor i 8 delar, för att sedan i sin tur dela den åttonde biten i 7 delar. Vi kan då misstänka att de också praktiskt hade genomfört detta innan den matematiska teorin för detta hade utvecklats. (Jan Thompson, 1991)

Idag kan vi konstatera att de flesta beräkningarna fram till 1950-talet fortfarande i första hand gjordes i bråkform. Med de enheter som var vanligt förekommande tidigare, som dussin, tjog, tum, fot, skäppa och kanna så var bråkräkningen ett utmärkt redskap som var viktigt att behärska. Studerar vi också kalenderårets indelning i 12 månader, 12/24 timmar, 60 minuter och 60 sekundersintervaller, så har ju även detta sitt ursprung i bråkräkning eftersom samtliga dessa tal har flera delare.

2.2 Varför bråkräkning?

Att eleverna ska lära sig att utföra beräkningar i bråkform har bland annat av dessa skäl tidigare varit högt prioriterad i skolan. Bråkräkning har naturligtvis fortfarande hög prioritet i kursplanerna. Men idag har det blivit mer och mer vanligt i grundskolan att man arbetar med decimaltal, på bråkräkningens bekostnad. Detta menar Madeleine Löwing, lärarutbildare, klassrumsforskare och författare till boken *Matematikundervisningens dilemman*. Många lärare i grundskolan menar att behovet av bråkräkning i vardagslivet har minskat, och därför undviker de att undervisa om bråk. Detta gör de också med stöd från flera läromedelsförfattare. (Löwing, 2006) Ett vanligt exempel är att man först gör om bråktalen till decimalform med hjälp av en räknedosa, och sedan utför man beräkningarna med räknedosan. Men enligt uppnåendemålen i skolår 9 skall eleverna ”ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform”. (Skolverket, 2000) Margareta Löwing säger att ”en taluppfattning om bråk bygger man upp genom att arbeta med dem, inte genom att undvika dem”. (Löwing, 2006 s.160)

Det har på detta sätt blivit allt vanligare på senare tid, att lärare undviker vissa moment i matematikundervisningen som man misstänker ställer till problem för eleverna. (Löwing, 2006) Följden av detta är att många elever kommer att få problem i den fortsatta undervisningen, och inte minst då de kommer upp till gymnasiet. Många lärare menar alltså idag att det inte finns något behov av bråkräkning i vardagslivet, och hoppar mer eller mindre över att undervisa om bråk. Men faktum är att eleverna inte lär sig matematik enbart för vardagslivet. Enligt kursplanens uppnåendemål i matematik ska de också ”ha förvärvat sådana kunskaper…som behövs som grund för fortsatt utbildning”. (Skolverket, 2000) Det har dessutom visat sig att satsningen på räkning med decimaltal på bråkräkningens bekostnad inte i någon nämnvärd grad har förbättrat elevernas prestationer i räkning med decimaltal. (Löwing, 2006)

2.3 Elevers kunskaper i bråkräkning

2.3.1 Margareta Löwings undersökning

Hur står det då till med bråkräkningen hos eleverna? Löwing har genomfört en undersökning för att kartlägga elevers kunskaper i räkning med bråktal. I ett antal rektorsområden och mindre kommuner har hon genomfört diagnoser i åk 7 och 9 där eleverna har fått ett antal uppgifter att lösa. I tabellen nedan så ser vi ett litet urval av de frågor som hon använde i räkning med bråk där lösningsfrekvensen för respektive fråga och årskurs finns med.

Uppgift	Rätt svar i åk 7	Rätt svar i åk 9
$8 \cdot \frac{1}{2}$	45%	72%
$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$	19%	43%
$\frac{3}{4} / \frac{1}{4}$	12%	34%

Tabel1 1. Undersökning i bråkräkning (Löwing, 2006 s.162)

Som vi ser i tabellen ovan så får mer än var fjärde elev i åk 9 fel svar på att utföra multiplikationen 8 gånger en halv. När det gäller att utföra multiplikationer och divisioner med två bråk ser resultatet riktigt illa ut. Klart fler än hälften av eleverna i åk 9 får fel på dessa uppgifter. På den sista uppgiften får i stort sett två av tre (66%) av eleverna i åk 9 fel svar, där uppgiften i själva verket går ut på att bestämma hur många fjärdedelar som ryms i tre fjärdedelar.

2.3.2 Ebbe Mölleheds undersökning

Vi studerar nu en annan intressant undersökning i Malmö, utförd av Ebbe Möllehed i gymnasiets första årskurs rörande elever i S och So. Ett litet utdrag av denna finns i ”Matematikundervisning i gymnasieskolan”. (Margita Nilsson, 1996 s.82) I denna undersökning var huvudfrågan vilken betydelse text och bild har i uppgifterna. Varje uppgift gavs därför i två versioner, en med text/bild och en utan. Nedan ser vi ett litet urval av de frågor som användes ur synpunkten ”Vad tycks eleven förstå?”, med respektive lösningsfrekvens. Jag har själv valt ut de frågor som behandlar just bråk, och frågornas numrering är min egen.

Uppgifter	Lösningsfrekvens	
	S	So
1a) Beräkna $\frac{1}{4}/2$	0,74	0,52
1b) Två personer delar på en fjärdedels chokladkaka. Hur stor del av chokladkakan får var och en?	0,93	0,86
2a) Beräkna $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$	0,88	0,59
2b) Vad är hälften av 3/4?	0,66	0,53
3a) Ange ett närmevärde (heltal) till $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$	0,49	0,20
3b) Ange ett närmevärde (heltal) till $\frac{12}{13}$	0,39	0,14

Tabell 2. Undersökning i bråkräkning (enl. Möllehed ur Nilsson, 1996 s.82)

Resultaten är mycket intressanta. I första uppgiften ser vi att lösningsfrekvensen ökar markant när eleverna ska dela på en fysisk chokladkaka, samtidigt som många elever inte klarar av uppgift 1a som är begreppsmässigt abstrakt. I uppgift 2 klarar eleverna av a-uppgiften bättre som kan lösas med hjälp av en procedur. Har man lärt sig proceduren (täljare gånger täljare delat med nämnare gånger nämnare) klarar man troligen av att lösa uppgiften, även om man inte förstår den bakomliggande idén. Många elever kanske inte har en aning om att de halverar 3/4 när de utför denna operation. I b-uppgiften blir det lägre lösningsfrekvens. Om täljaren vore jämn kanske lösningsfrekvensen skulle vara något högre? Riktigt låg lösningsfrekvens finner vi på de sista två deluppgifterna som man kan se i tabellen ovan. Kanske kan detta bero på att eleverna inte har övat på den här sortens uppgifter och inte kan ta till sig frågeställningen?

Jag har nu försökt att ge en bild av elevernas kunskaper i bråkräkning i några olika årskurser i grundskolan och även i första årskursen på gymnasiet. Vi kan konstatera att många elever har stora problem med att lösa uppgifter i bråkräkning. Vidare så har vi sett i Mölleheds undersökning att uppgifternas lösningsfrekvens påverkas ganska mycket av hur frågorna formuleras. Studerar vi till exempel uppgiften $8\cdot 1/2$ i Löwings undersökning så handlar ju detta om något så enkelt som att 8 halva är lika mycket som 4 hela. Löwing har gjort en undersökning bland förskoleelever där hon frågat barnen hur många äpplen man behöver för att sex barn ska få ett halvt äpple var. Det visade sig att de flesta barnen hade en lösning på detta problem. Löwing säger att ”På motsvarande sätt vet i stort sett alla elever i skolår 7 att 8 halva äpplen är lika mycket som 4 äpplen. Problemet är att de inte lärt sig att abstrahera denna typ av konkreta erfarenheter”. (Löwing, 2006 s.163) Det stora kliv från att först arbeta med bråket i ett mer konkret sammanhang till att kunna abstrahera bråkbegreppet och arbeta med bråk som operatorer uttrycker Madeleine Löwing så här:

> *”Ett problem vid introduktionen av bråk är enligt Kilborn (1990) att bråket har så många ”ansikten”. Till en början brukar man introducera bråk som del av helhet. Man talar om ett halvt äpple, en tredjedels pizza osv. I nästa steg tar många lärare*

för givet att eleverna därmed automatiskt kan ta hälften av 8 eller en tredjedel 6, alltså att operera med bråk som tal”. (Löwing, 2006 s.167)

2.4 Kunskap eller kognitiv förmåga?

En intressant aspekt är att man inte kan dra slutsatsen, att de elever som inte klarar av att lösa en uppgift inte har de matematiska kunskaper som krävs för detta, utan det handlar oftare om andra faktorer. Ebbe Möllehed disputerade 24 september 2001 med avhandlingen ”*Problemlösning i matematik – en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4-9*”. Syftet med studien var ”att undersöka och beskriva vilka faktorer som påverkar den enskilda eleven när han/hon ska lösa problem i matematik och att jämföra olika elevers prestationer i olika årskurser och att jämföra pojkars och flickors prestationer”. Nedan är ett utdrag ur ett pressmeddelande från 27 september 2001 angående resultaten från forskningsrapporten:

> *”Resultaten visar att elevernas oförmåga att lösa ett matematiskt problem snarare bottnade i brister i mognad och tankeutveckling än brister i rent matematiska kunskaper. Eleverna hade alltså svårt att förstå och se allmänna samband och många misslyckades med att lösa uppgifterna på grund av att de inte kunde ta till sig texten. Oförmåga att förstå texten var det vanligaste ”felet””* . (Nowotny, 2001)

Möllehed kunde visa att hela 60% av felen kunde spåras till brister i elevernas mognad och allmänna tänkande, det som vi brukar förknippa med den kognitiva förmågan. Vidare berodde 15% av felen på slarv eller bristande uppmärksamhet och endast 25% av felen kunde spåras till bristande matematiska kunskaper. (Nowotny, 2001) Ett förbryllande resultat kan man tycka, och värt att ha i åtanke när man vill testa elevers kunskapsnivå i matematik med skriftliga uppgifter.

Under de senaste 30 åren har en intensiv och omfattande forskning bedrivits där syftet har varit att ta reda på hur elever kan lära matematik. I denna forskning har man analyserat och omvärderat äldre undervisningsmetoder, och det har under tidens gång vuxit fram en ämnesmetodik och -didaktik som mer tar hänsyn till kravet på konkretisering, och elevers förmåga att lära. Inom just bråkräkning har det tidigare funnits en tradition att eleverna skulle lära sig ett antal formler utantill med vars hjälp man skulle kunna lösa alla problem i bråkräkning. ”I dagens ”Skola för alla” krävs en annan metodik om innehållet skall bli begripligt för alla elever. Där måste det ställas krav på konkretisering och förståelse”. (Löwing, 2006 s.167)

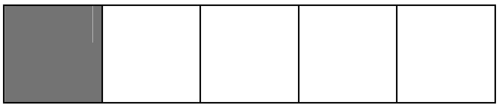
2.5 En didaktisk modell

Madeleine Löwing har i boken ”Matematikundervisningens dilemman” gett förslag på hur man kan bygga upp en didaktisk ämnesteori för bråkräkning. Hon presenterar ett ”skelett” och poängterar att man som lärare får komplettera den med lämplig metodik beroende på mål och elevgrupp. Löwing presenterar först tre förkunskaper som hon menar krävs för att utföra samtliga aritmetiska operationer vid arbete med tal i bråkform. De tre förkunskaperna är:

1. Att förstå nämnarens innebörd i tal som $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}...$

   Bråket $\frac{1}{5}$ kan helt enkelt betraktas som en enhet på samma sätt som 1 cm eller 1 kg.

   Det svarar också mot en av fem lika stora andelar av en helhet eller storhet, t ex:

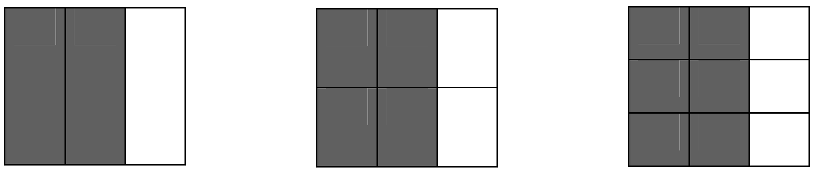


2. Att förstå täljarens innebörd, dvs. att $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ och att $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

   Det här betyder att $\frac{3}{4}$ ska tolkas som tre enheter av storleken $\frac{1}{4}$ på samma sätt som 3 cm betyder 3 enheter av storleken 1 cm.

3. Varje bråk kan skrivas på oändligt många sätt. Bråket $\frac{2}{3}$ kan t.ex. även skrivas som $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\ldots$ och bråket $\frac{3}{4}$ som $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}\ldots$

   Punkt 3 kan lätt demonstreras med *chokladkakemodellen.* (Kilborn, 1990; Löwing & Kilborn, 2002) Att $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ visas nedan.



Löwing säger att om eleverna har dessa förkunskaper, och dessutom kan de grundläggande räknereglerna och förstår de olika räknesättens innebörd, så är det möjligt att eleverna ska kunna utföra de flesta operationer vid räkning med bråk.
I det följande vill jag redovisa hur Löwing menar att detta kan gå till, där förutsättningen är att eleverna har förkunskaperna i punkt 1-3 ovan.

2.5.1 Addition, subtraktion och jämförelse

Vid addition och subtraktion av bråk behöver man känna till att *man bara kan operera med bråk som har samma nämnare.*
För att utföra additionen $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ måste man först skriva om bråken så att de får samma nämnare. Med förkunskapen (3) ovan vet vi att $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}\ldots,$ och $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}\ldots$
Genom att välja enheten $\frac{1}{12}$ så kan man utföra additionen som $\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$.
Att välja samma enhet vid addition och subtraktion känner eleverna till sedan förut, t.ex. när de har adderat 2 cm och 3 dm. Genom att skriva om bråk på detta sätt så att de får samma nämnare kan man också jämföra storleken på olika bråk.

2.5.2 Multiplikation

För att utföra multiplikationen $3\cdot\frac{2}{5}$ utgår man från att $\frac{2}{5}$ betyder $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$,
och det är viktigt att här poängtera täljarens betydelse som antalet enheter.
Då eleverna känner till multiplikation som upprepad addition är det enkelt att se att
$3\cdot\frac{2}{5}=(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})$.
Man kan tydligt se att det tillsammans blir 6 stycken femtedelar. Vi tolkar alltså detta som 3· 2 femtedelar eller $\frac{3\cdot 2}{5}$.

2.5.3 Division av ett bråk med ett naturligt tal

Här delar Löwing upp problemet i två fall. I det ena fallet är täljaren delbar med divisorn, och i det andra fallet är så inte fallet. Vi studerar först divisionen $\frac{4}{5}/2$. Här ser vi att täljaren är delbar med divisorn 2. Vi betraktar igen täljarens betydelse som antalet enheter, det vill säga $\frac{4}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$. Att dividera $\frac{4}{5}$ med 2 innebär att dela dessa 4 femtedelar i två lika stora delar. Om vi skriver $\frac{4}{5}$ som $(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})$, är det enklare att se att resultatet måste bli $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.
Bråket $\frac{4}{5}$ bör alltså betraktas som $4\cdot\frac{1}{5}$, eller för yngre barn som 4 *femtedelar*. Löwing betonar att, ett av problemen med resonemanget ovan, är det formella språket. Många elever har svårt att tolka innebörden av bråk som $\frac{4}{5}$. Hon menar att det blir betydligt lättare att förstå den här typen av operationer om man skriver en femtedel utan siffror, och betraktar femtedelen som vilken enhet som helst. Skriver man istället $\frac{4}{5}/2$ som 4 *femtedelar*/2, så är det enklare att se att resultatet blir 2 femtedelar, på samma sätt som att 4 cm/2 innebär att dela en sträcka på 4 cm i två delar. De flesta elever vet att resultatet blir 2 cm.

I det andra fallet är täljaren *inte* delbar med divisorn. Vi studerar nu divisionen $\frac{2}{5}/3$. Vi konstaterar att täljaren inte är delbar med divisorn 3. Med hjälp av förkunskap (3) ovan, löses uppgiften genom att förlänga bråket till dess att täljaren blir delbar med 3. Här får man prova sig fram till att $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$, där täljaren 6 är delbar med 3. Lösningen kan då skrivas som
$\frac{2}{5}/3=\frac{6}{15}/3=(\frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15})/3=\frac{2}{15}$.

2.5.4 Division med två tal i bråkform

För att utföra en division av två bråktal med samma nämnare kan man använda sig av så kallad innehållsdivision. Studera divisionen $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$. Frågan handlar nu om hur många gånger $\frac{1}{4}$ ryms i $\frac{3}{4}$. Skriver vi detta som $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})/\frac{1}{4}$ så syns det tydligare att $\frac{1}{4}$ ryms tre gånger i $\frac{3}{4}$.

När det gäller bråktal med olika nämnare vill Löwing använda en annan strategi. Nu studerar vi divisionen $\frac{3}{4}/\frac{2}{5}$. Metoden är nu är att försöka skriva om bråken så att de får samma nämnare. Genom att välja nämnaren 20 så finner vi att $\frac{3}{4}/\frac{2}{5}=\frac{15}{20}/\frac{8}{20}=\frac{15}{8}$. Frågan reduceras därmed till att bestämma hur många gånger 8 ryms i 15.

Det här är alltså Madeleine Löwings förslag på hur man kan arbeta med bråk. Hon kallar det för en ”överordnad didaktisk struktur”, och menar att utgående från denna struktur kan varje lärare välja metodik och modeller för konkretisering. Förslaget är naturligtvis högst intressant, eftersom det på ett plan syftar till att försöka minska fokus på procedurell inlärning av räkneregler, som ofta bidrar till minskad förståelse om operationernas verkliga innebörd.
Löwing säger så här:

> *”För en lärare som tidigare arbetat procedurellt med bråk, utan att ha reflekterat över operationernas verkliga innebörd, är det naturligtvis en omställning att arbeta såsom jag nyss beskrivit.[…] De som verkligen bytt perspektiv har emellertid beskrivit vilket lyft de känt när de insett att det går att förstå vad som händer vid bråkräkning och hur detta perspektiv öppnar vägen in i algebran”.*
> (Löwing, 2006 s.172)

2.6 En läromedelsanalys av matematikböcker

Slutligen vill jag presentera en forskningsrapport från år 2003 vid namn ”Idag får ni räkna framåt i era böcker!”, av Jan Dahlström, Mattias Stenmark och Ulla Lahtinen på Åbo Akademi i Vasa. De har gjort en undersökning med syfte att utreda om det läromedel som används i matematikundervisningen har något samband med elevers uppnådda resultat på ett matematiktest (de s.k. MAKEKO-proven). De centrala frågeställningar som studien baserades på var i korthet

- Hurudana är de läromedel som användes? Finns det skillnader mellan läromedlen?
- Hurudana är lärarnas uppfattningar om de läromedel de använt?
- Hurudant är sambandet mellan använt läromedel och elevernas prestationer?

Undersökningsgruppen bestod av elever i årskurs 5 och årskurs 8 från Österbotten som deltog i en kartläggning av matematikkunskaper från år 1991 och 1994, genomförd av Linnanmäki, som utmynnade i en doktorsavhandling (Linnanmäki, 2002). Dahlström m. fl. skickade år 2000 ut enkäter till de aktuella lärarna som deltog i Linnanmäkis studie. Detta dels för att få

reda på vilka läromedel som användes i undervisningen i respektive klass under den aktuella tiden (1991 och 1994), men också för att få lärarnas åsikter om läromedlet. Med hjälp av informationen de fick kunde de sedan koppla samman ett visst elevresultat på MEKEKO-proven med det läromedel som den eleven haft. I undersökningen ingick elever från årskurs 5 (N=245) och årskurs 8 (N=231) med antingen finska eller svenska som skolspråk, samt elevernas lärare.
Studien omfattar de läromedel som användes i skolorna under första halvan av nittiotalet, och både svenska och finska läromedel ingick i undersökningen. Med begreppet läromedel avses undervisningsmaterial av olika slag, från tillfälliga konkretiseringsmaterial till mera omfattande läromedel som böcker. I undersökningen har författarna använt begreppet matematikböcker för att täcka såväl läroböcker som övriga läromedel, när annat inte har uttryckts explicit. Från årskurs 5 var det en svenskspråkig (den förstnämnda) och fyra finskspråkiga läroböcker som ingick i studien. Dessa var *Femmans matematik*, *Peruskoulun matematiikka 5*, *Plussa 5*, *Ahaa 5* och *Matematiikkaa 5*. Från årskurs 8 ingick följande tre läroböcker, *Matematikboken 8*, *Plussa 8* och *Ahaa 8*, där den förstnämnda är svenskspråkig, de andra två finskspråkiga.

I den enkät som skickades ut till lärarna efterfrågades de fördelar och nackdelar med den matematikbok som lärarna hade använt sig av. Det visade sig att de flesta enkätsvaren handlade om bokens *form* och/eller *innehåll*, med klart fler kommentarer om just innehållet. Författarna säger att detta var väntat ”eftersom tidigare forskning har visat att lärare ofta använder boken som utgångspunkt vid planering. Då är det innehållsperspektivet som är i fokus.” (Dahlström Stenmark, Lahtinen, 2003 s.41). Synpunkterna som lärarna gav angående bokens *innehåll* delade författarna in i tre underkategorier som utkristalliserades:

- Övning av mekaniskt räknande
- Uppgifter för individualisering
- Centralt ämnesstoff

Den kategori av de ovannämnda som de flesta lärare uttryckte åsikter om var läromedlets antal av *mekaniska uppgifter*. Några lärare ansåg att läromedlet innehöll för få uppgifter i mekaniskt räknande, andra lärare ansåg att det var för många mekaniska uppgifter, på bekostnad av annan uppgiftstyp.

Läromedlets *form* avser lärobokens yttre egenskaper som beskriver t ex bilder, layout, estetik samt utseendemässig klarhet. Beträffande läromedlets form så delade författarna upp synpunkterna i tre beskrivningskategorier. Efter varje kategori presenteras några exempel på positiva (+) eller negativa (-) omdömen som någon eller några lärare haft om det använda läromedlet:

- Utseendemässig klarhet

En utseendemässig klarhet som gör den lätt att använda (+)
För många uppgifter, tung och kompakt (-)

- Läromedlets estetik

Tilltalande och behagligt utseende (+)
Färgglad och modern (+)
Gammalmodigt och trist utseende (-)

- Läromedlets illustrationer

Illustrationerna understödjer stoffet väl (+)
Illustrationerna anknyter inte till texten (-)
Färglösa, omoderna, dåliga och trista illustrationer (-)

Åsikterna om läromedlets form var av väldigt varierande karaktär. Ur lärarnas perspektiv verkar läromedlets form vara av underordnad karaktär, det är innehållet som är den viktigare faktorn vid val av läromedel.

Dahlström m. fl. genomförde också både en *kvalitativ* och en *kvantitativ* analys av läromedlen. Syftet med denna analys var att dels beskriva läromedlen, men också att jämföra läromedlen med varandra. I den kvalitativa analysen använde man sig av några kriterier som tidigare använts av Persson & Sjögren (1998) vid deras analys av matematikböcker i Sverige. Författarna ansåg att kriterierna i deras analysmodell väl svarade upp mot syftet i denna studie. Huvudkriterierna är:

- Språklig klarhet
- Anknytning till vardagen
- Bilder och estetik

I den kvantitativa analysen räknades antalet uppgifter inom ämnesområdena division och geometri som kan klassificeras som:

- Mekaniska uppgifter
- Textuppgifter
- Huvudräkningsuppgifter

Anledningen till att man valt dessa ämnesområden var att just inom dessa ämnesområden fanns de största skillnaderna i elevernas prestationer.

Vad visar då studien för resultat? Först och främst visar studien att de elevgrupper som hade ett svenskt läromedel och därmed svenska som skolspråk nästan genomgående hade låga resultat i MEKEKO-provet jämfört med de elever som hade finskspråkiga läromedel och därmed finska som skolspråk. T ex visade de elevgrupper som använt de finska läroböckerna Plussa 5 och Ahaa 5 upp ett nästan genomgående bättre resultat än de elevgrupper som hade använt det svenska läromedlet Femmans matematik. Hos läromedlen i årskurs 5 var visserligen skillnaderna mellan böckerna inte så stora, skillnaderna handlade mest om layout och estetik. Men Dahlström m. fl. framhåller att både Plussa 5 och Ahaa 5 hade utmärkta illustrationer som stöd för uppgifterna, och poängterar dessutom att Plussa 5 hade varierande uppgifter. Femmans matematik hade flest uppgifter av alla analyserade läroböcker, vilket skulle kunna ses som ett tecken på att många uppgifter inte är någon garanti för ett effektivt lärande, menar författarna.

Skillnaderna mellan böckerna var tydligare i årskurs 8, och skillnaderna var främst inom layout och språk. De elever som använt de finskspråkiga läroböckerna Plussa 8 och Ahaa 8 visade på flera områden upp ett bättre resultat än de elever som använt den svenskspråkiga Matematikboken 8. Utmärkande för de två finskspråkiga läroböckerna var att de båda hade en språkanvändning som var lätt att förstå för målgruppen. Dessutom var de båda böckerna mycket estetiskt tilltalande, menar författarna. Matematikboken 8 däremot, hade ett minimum av illustrationer och innehöll ett stort antal av matematikord. Dessutom fanns det bland de elever som använt Matematikboken 8 en högre frekvens lågpresterande elever. Författarna kommenterar detta med att ”Detta kan tolkas så, att bilder och layout har stor betydelse och formaspekten bör ses som en viktig egenskap hos läroboken.” Vidare säger Dahlström m. fl. så här:

> *”Layouten kan innehålla illustrationer som stöder inlärning och förståelse. Bilder och en luftig layout kan också ge ett positivt intryck som kan vara motiverande för eleven. En kompakt text utan bilder och med många matematikord kan ge ett negativt intryck”.* (Dahlström m. fl., 2003, s.55-56)

Författarna sammanfattar detta med att säga att:

> *”De elevgrupper som presterade bäst och hade den lägsta andelen lågpresterande elever hade använt böcker med god layout, goda illustrationer och ett språk på lämplig nivå”.* (Dahlström m. fl., 2003, s.3)

Författarna poängterar att lärarens undervisningsstil naturligtvis kan påverka resultaten ovan. ”Lärarens betydelse kan inte förnekas”, säger de. Dessutom måste hänsyn tas till kulturella skillnader mellan finsk- och svenskspråkiga elever, allmän inställning till skolarbete, syn på läroböcker, syn på inlärning och skolspråk, menar de. I sammanhanget är det värt att notera att flera andra kartläggningar av elevers prestationer i matematik visar att de finska eleverna presterar bättre än de svenska. Författarna avslutar med orden ”Sammantaget visar resultaten i denna studie att det finns skillnader i elevernas prestationer som har samband med de läromedel eleverna använt”. (Dahlström, Stenmark, Lahtinen, 2003, s.56)

3. Syfte

Med en läromedelsanalys vill jag belysa några olika läroböckers sätt att presentera och hantera bråkräkning, särskilt med inriktning mot instrumentella och relationella principer.
Med ordet *instrumentell* menar jag i detta sammanhang att lösa en uppgift med hjälp av en procedur utan att förstå den bakomliggande teorin eller idén. Med *relationell* menar jag att man förstår sammanhanget och den bakomliggande idén eller teorin när man t ex löser en uppgift.

Det har tidigare funnits en tradition inom bråkräkning att man ska lära sig ett antal formler utantill med vars hjälp man ska kunna lösa alla problem i bråkräkning. (Löwing, 2006)
I boken ”*Matematikundervisningens dilemman*” (Löwing, 2006) presenteras ett speciellt sätt att arbeta med bråk som jag finner mycket intressant. Madeleine Löwing bygger upp en didaktisk struktur med mål att eleverna ska förstå de matematiska operationernas verkliga innebörd. Hennes förslag att arbeta med bråk anser jag vara mer ”relationellt”. Därför är det intressant att studera hur läroböckerna hanterar bråkbegreppet ur instrumentella och relationella principer i allmänhet, och även jämföra detta med Löwings modell. Vad använder man sig av för förklaringsmodeller, hur konkretiserar man operationerna? Jag finner det särskilt intressant att studera multiplikation av ett bråk med heltal, multiplikation av två bråk, division av ett bråk med ett heltal och vice versa, samt division av två bråk. Använder man sig t ex av innehållsdivision vid division av två bråk?
Hur förklaras divisionen $\frac{1}{2}/2$?
Syftet är att beskriva och jämföra vilka olika grepp läroböckerna använder för att hantera denna typ av frågeställningar. Dessutom vill jag försöka utreda huruvida läroböckernas hantering av ovannämnda frågeställningar kan kategoriseras som mer eller mindre instrumentell kontra relationell. Med ordet relationell tänker jag alltså i första hand på ett speciellt sätt att arbeta med bråk som rimmar väl med Löwings förslag på metod att arbeta. Men indirekt kan det också förknippas med alla de egenskaper som man förknippar med en god lärobok, som t ex en luftig layout, fina bilder, bra illustrationer, tydliga förklaringar, etc.
Därför har jag också valt att översiktligt beskriva layout och disposition, och ge några kommentarer om detta.

Med detta hoppas jag få viss kunskap om elevers problem med bråkräkning i någon mån kan ha med deras läroböcker att göra. Under arbetets gång hoppas jag själv få nya kunskaper och idéer om alternativa upplägg och förklaringsmodeller inom området.
Denna kunskap och dessa idéer tror jag att jag kommer att ha nytta av som lärare även inom andra områden av matematiken.

4. Metod

Jag har varit ute på två högstadieskolor och lånat två uppsättningar av läroböcker i matematik som används på dessa skolor i undervisningen. De aktuella böckerna är följande:

- Matematikboken XYZ (Undvall, Olofsson och Forsberg. Förlag: Almqvist & Wiksell)
- Matte Direkt år 7-9 (Carlsson, Hake och Öberg. Förlag: Bonniers)

Jag kommer att inleda med en kort beskrivning av hur respektive läroboksserie är upplagd. Sedan vill jag beskriva och analysera hur läroböckerna hanterar följande problemställningar inom bråkräkning:

- Division av ett tal i bråkform med ett naturligt tal, och vice versa
- Division av två tal i bråkform
- Multiplikation av ett tal i bråkform med ett naturligt tal
- Multiplikation av två tal i bråkform

Jag vill också göra en jämförelse böckerna sinsemellan med utgångspunkt i ovanstående frågeställningar. Metoden är alltså dels att beskriva och analysera, men också att jämföra läroböckernas sätt att hantera dessa frågeställningar, och särskilt med inriktning mot instrumentella och relationella principer. Jag vill dessutom studera om det didaktiska upplägget som läroböckerna använder påminner något om Madeleine Löwings förslag på metod att arbeta med bråk. Det jag främst kommer att rikta intresset mot är de förklaringsmodeller som läroböckerna använder. Med förklaringsmodell avser jag alla diskussioner, förklaringar, exempel, noteringar, illustrationer etc., som läroböckerna använder sig av vid introduktionen av ett nytt begrepp.

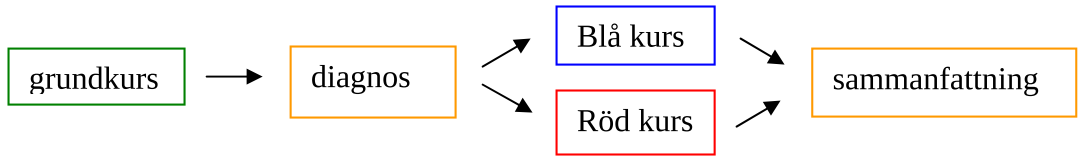
Anledningen till att jag valt just dessa två läroboksserier att analysera, är att det var de läroboksserier som fanns att tillgå på de högstadieskolor jag besökte, och som har använts på dessa skolor i undervisningen.

5. Beskrivning och analys

5.1 Läroboksserien Matte Direkt

5.1.1 Läroböckernas uppläggning

Läroboken Matte Direkt består av tre läroböcker för högstadiet, en för varje årskurs. Varje kapitel har följande struktur:



I grundkursen går man igenom de moment, som beskrivs i målen. Varje kapitel i boken inleds nämligen med en målbeskrivning, ett antal kunskaper och färdigheter uppställda i punktform vad eleverna ska kunna efter att ha studerat avsnittet. I slutet av grundkursen får man göra en snabbrepetition, ”Sant eller falskt” inför diagnosen. Beroende på hur diagnosen går väljer man antingen blå eller röd kurs. Om diagnosen var för svår väljer man blå kurs, då behöver man träna mer. Gick diagnosen bra går man vidare till röd kurs där man får arbeta med mer utmanande uppgifter och ibland med nya moment. Sammanfattningen innehåller kapitlets viktigaste moment. Dessutom innehåller boken en avdelning uppgifter nämnda ”Arbeta tillsammans”, där man ska arbeta med en eller flera kamrater. För de elever som vill ha lite större utmaningar finns efter diagnosen tre ”kluringar” och i slutet av kapitlet en större ”utmaning”. Slutligen kan sägas att till varje kapitel finns fyra läxor som är uppdelade i olika svårighetsgrader.

Mina frågor handlar om hur multiplikation och division av bråk (och heltal) hanteras. Dessa operationer finner man först i läroböckerna Matte Direkt år 8 och Matte Direkt år 9, och inte i Matte Direkt år 7. Utgångspunkten bör därför vara att de flesta eleverna inte har några särskilda förkunskaper inom området när det introduceras i årskurs 8.

5.1.2 Allmänt om bråkavsnittet, Matte Direkt år 8

I läroboken för årskurs 8 påträffas bråkavsnittet i ett kapitel som heter ”Procent med bråk”. Målet med bråkavsnittet uttrycks i inledningen på kapitlet på följande sätt:
”När du har studerat det här kapitlet ska du kunna:

- jämföra storleken på olika bråk
- förkorta och förlänga bråk
- multiplicera bråk”

Målbeskrivningen presenteras tillsammans med två bilder och några frågeställningar som hör bilderna till. Kapitlets grundkurs i bråk består av 4 sidor som går i grön layout. Samtliga illustrationer (ca 7 st.) är helt avsedda för att stödja och konkretisera exemplen och textförklaringarna. Avsnittet startar med rubriken ”Minns du bråken?”. Med en bild på 6 gröna-, tre vita- och tre röda godisbilar lagda i tre rader och fyra kolumner vill författarna visa hur man kan skriva olika andelar av påsens innehåll i bråkform. T ex visas att 6 av 12 bilar kan skrivas som 6/12, som i sin tur kan skrivas som 1/2. Avsnittet fortsätter med uppgifter att avgöra storleken på olika bråk sinsemellan, även mellan bråk med olika nämnare. Detta ska genomföras både med och utan räknedosa. Sedan följer förlängning och förkortning av bråk, detta konkretiseras med den s.k. ”chokladkakemodellen”. Vidare följer rubriken ”Hur stor är delen?”. Här presenteras två metoder för att räkna ut hur mycket 3/4 av 20 är. Grundkursen avslutas med de två rubrikerna ”Bråk flera gånger” och ”Multiplicera två bråk” som är två av de frågeställningar som jag ämnar studera närmare.

Den blå delen (blå kurs) består av två sidor. På första sidan använder man sig av två bilder (som ”chokladkakemodellen”) för att konkretisera 1/5 respektive 2/3. Sedan följer ett antal repetitionsuppgifter med inriktning mot att förstå ett bråks storlek i relation till annat bråk. På nästa sida använder man sig igen av chokladkakemodellen för att visualisera förkortning och förlängning av bråk, följt av några repetitionsuppgifter. Några nya förklaringsmodeller kan jag inte se här.

I den röda delen (röd kurs) visas först hur man adderar två bråk med olika nämnare genom att förlänga bråken till samma nämnare. Efter detta följer några övningar. Detta är alltså ett nytt problem som inte tidigare har förklarats i den gröna delen. Sedan följer ett repetitionsexempel på multiplikation av två bråk, där man nu dessutom visar hur man kan förkorta ”på vägen” innan man kommer fram till svaret, följt av några övningar. Den röda delen avslutas med rubriken ”Bråk med algebra”, där man nu får multiplicera, dividera, addera och subtrahera med bråk som innehåller variabler. Detta förekommer inte i den gröna delen.
Den röda delen innehåller inga bilder, kan sägas.

5.1.3 Multiplikation av bråk med heltal

Under rubriken ”Bråk flera gånger” inleder man med ett exempel på hur en multiplikation av ett bråk med ett heltal går till:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

	Skriv på samma bråkstreck	Räkna ut vad täljaren blir	Svara med hela och delar

Exemplet illustreras enligt figuren nedan.

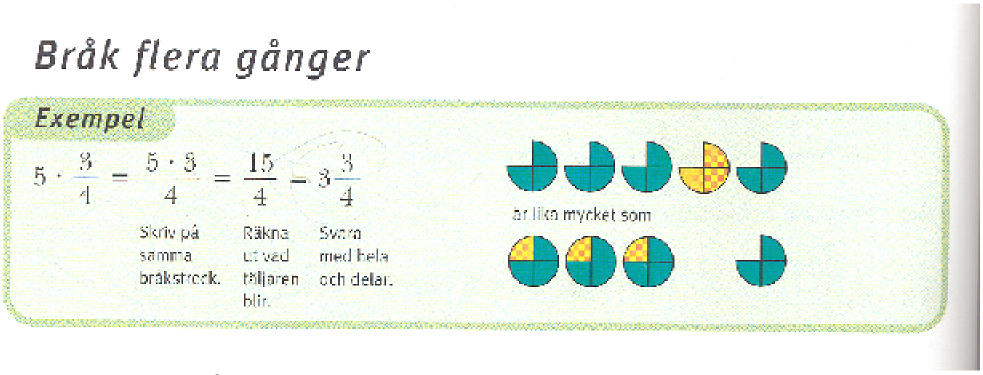


Illustration 1. (Carlsson m.fl., 2002 s.114)

Illustrationen tycker jag på ett utmärkt sätt åskådliggör beräkningen, den är enkel, relationell och stödjer det numeriska exemplet ovan. Studerar vi sedan förklaringen ovan, det numeriska exemplet med de små texterna under, så tror jag ändå att det skulle vara till fördel att läroboken förtydligar varför täljaren ska multipliceras med 5. Exemplet ger en tydlig signal om att det är täljaren som ska multipliceras med det tal som står framför bråket, men om inte eleverna förstår varför, kan resultatet bli ett instrumentellt räknande av uppgifter, utan förståelse. Löwings metod, se teoriavsnittet, är att dela upp beräkningen, som i detta fall skulle bli på följande sätt:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = 5 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$$

Nu ser man tydligare varför resultatet blir 15 st. fjärdedelar, och det känns logiskt att det är täljaren som ska multipliceras med 5. Förutsättningen är naturligtvis här att eleverna kan addera bråk med samma nämnare. Några andra fördelar med detta skrivsätt är att man nu lättare ser täljarens innebörd som antalet enheter av 1/4, och att eleverna blir påminda om multiplikationens innebörd som upprepad addition, i ett nytt sammanhang.

5.1.4 Multiplikation av två bråk

Grundkursen avslutas med rubriken ”Multiplicera två bråk”. Detta förklaras och illustreras på följande sätt:

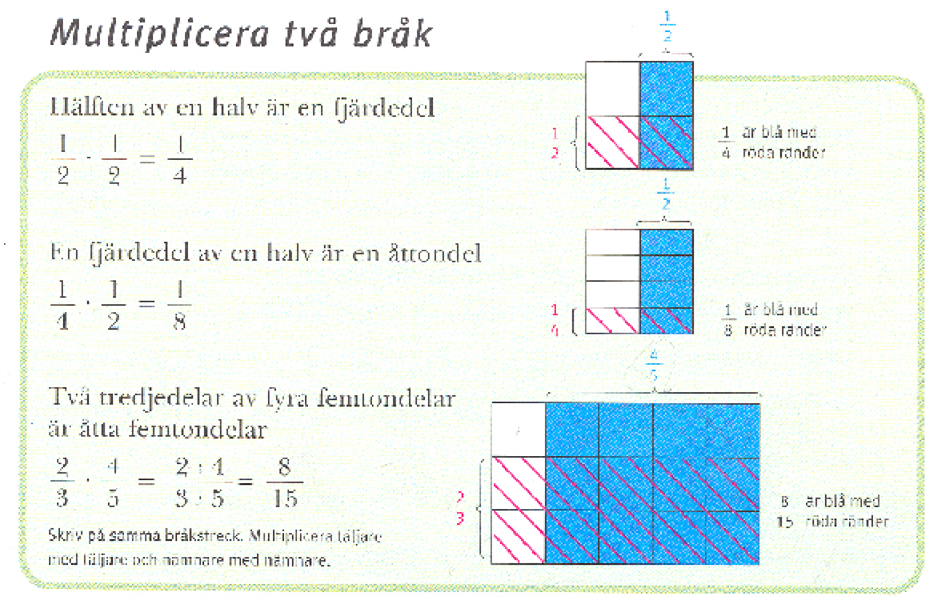


Illustration 2,3,4. (Carlsson m.fl., 2002 s.115)

Jag tycker att de tre illustrationerna på ett mycket bra sätt stödjer textförklaringarna. Det krävs visserligen en viss koncentration för att förstå vad som representerar resultatet av beräkningarna. Kanske bör det poängteras ännu tydligare att resultatet av multiplikationerna är de rutor som både är blåfärgade och har röda ränder.

”Hälften av en halv är en fjärdedel” säger man och visar detta med operationen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Normalt sett om man vill halvera ett tal så dividerar man ju talet med talet 2. Hur kan ett tal halveras om man multiplicerar med $\frac{1}{2}$? Hur kopplar läroboken samman dessa operationer? Eftersom eleverna inte ännu har dividerat ett tal i bråkform med ett heltal så tror jag att opera-

tionen ovan kan vara svår att förstå i detta läge. Även om de fina illustrationerna gör sitt till för att konkretisera operationen, så tycker jag ändå inte att innebörden av operationen framgår.
Strax innan eleverna arbetar med multiplikation av bråk, har de arbetat med uppgifter av typen att ta $\frac{3}{4}$ av 20 st. Med metod två i exemplet visar man detta på följande sätt:
$\frac{3}{4}$ av 20 = $\frac{3 \cdot 20}{4} = \frac{60}{4} = 15$ st. Kanske att läroboken i detta avsnitt borde poängtera att $\frac{3 \cdot 20}{4}$ också kan skrivas som $\frac{3}{4} \cdot 20$? Då får man en mer naturlig övergång till att ta hälften av en halv, en fjärdedel av en halv osv.
Ett förslag är också att man, direkt efter att ha arbetat med multiplikation av bråk med ett heltal, också arbetar med division av bråk med ett heltal. Sedan anknyter man divisionen till motsvarande multiplikation. Annars finns en viss risk i att många elever bara lär sig proceduren att ”multiplicera täljare med täljare och nämnare med nämnare”, och sedan förfaller till ett instrumentellt räknande, utan förståelse. Sägas bör dock att multiplikation av två bråk är en operation som inte är enkel att förklara för elever på den här nivån.
Uppgifterna som följer i avsnittet är av i stort sett samma sort. Den sista uppgiften är stjärnmärkt och är den enda som har vardagsanknytning. En av delfrågorna i denna uppgift rör hur mycket det är i en flaska som rymmer 3/4 liter som är fylld till 1/3. Att den är stjärnmärkt betyder att uppgiften ”kräver lite extra tankemöda”, enligt författarna. Uppgiften i sig skiljer sig egentligen inte från de andra uppgifterna i lösningsmetod. Lite olyckligt att sätta en stjärna på den eftersom de svaga eleverna då kan avskräckas att försöka lösa den.

5.1.5 Allmänt om bråkavsnittet, Matte direkt år 9

Divisioner med bråk finner vi först i Matte Direkt år 9. I denna bok har man delat upp bråkavsnittet i två avdelningar. Första avsnittet hittar man på sidorna 146-149. Innehållet på dessa sidor handlar en hel del om repetition från åttans kurs. Här inleder man med att jämföra storleken på bråk sinsemellan, och även att avgöra om ett givet bråk är mindre eller större än 1 eller 1/2. Avsnittet fortsätter på nästa sida med förlängning och förkortning av bråk. På tredje sidan ska man räkna med bråk, addition av bråk med samma nämnare, och även med bråk i blandad form. En koppling görs också mellan decimaltal och bråk med hjälp av en tallinje. Avsnittet avslutas med att eleverna får addera och subtrahera bråk med olika nämnare, även i blandad form, men med hjälp av räknedosa.

Den andra avdelningen startar på sidan 188 under rubriken ”Bråk och algebra”, och består av 6 sidor. Denna avdelning ligger i ett kapitel som heter ”Styva linan”, hela kapitlet är rödmärkt och räknas som fördjupning. Layouten på dessa sex sidor ger ett kompaktare intryck än bråkavsnittet i läroboken för årskurs 8. Det finns totalt tre bilder och en illustration, varav bilderna inte har någon förklarande funktion. Illustrationen däremot är till för att konkretisera en subtraktion av två bråk med olika nämnare. Således finns inte någon konkretiserande illustration avseende multiplikation och division av bråk. Avsnittet behandlar i tur och ordning addition och subtraktion av bråk med olika nämnare, dessutom med variabler i både täljare och nämnare. Sedan följer multiplikation och förenkling av bråk, först utan, sedan med variabler. De två sista sidorna handlar om division av bråk, först utan variabler, sedan dividerar och förenklar man bråk med variabler.

5.1.6 Multiplikation av bråk, Matte Direkt år 9

I Matte Direkt år 9 går man vidare med multiplikation av bråk på så sätt att man nu ska multiplicera med bråk i blandad form och även med tre bråk inblandat. Detta är något nytt som tidigare inte har behandlats i läroboksserien. I det första exemplet visas hur man multiplicerar ihop två bråk på precis samma sätt som redan beskrivits i läroboken för årskurs 8, men nu utan någon stödjande illustration. Sedan förkortar man ”på vägen” fram till slutresultatet. Detta har också tidigare beskrivits i den röda kursen i åttans lärobok.
I det andra exemplet visas multiplikation av två bråk som båda är i blandad form. En liten anvisning säger att man först ska göra om talen till bråkform. Sedan förkortar man återigen ”på vägen” fram till slutresultatet.

Förklaringsmodellerna här består alltså av lösta exempel med någon enstaka anvisning, som t ex ”Gör först om från blandat tal till bråkform”, men nu helt utan stödjande illustrationer. Detta beror till stor del på att man har valt att använda sig av lite större tal i täljare och nämnare och då skulle illustrationerna förstås bli ganska svåröverskådliga. Jag tycker att det vore bra att istället inleda detta avsnitt med ett enklare exempel tillsammans med en konkretiserande illustration, på samma sätt som man gör i åttans lärobok. Många elever har säkert nytta av detta, samtidigt som det skulle göra layouten betydligt luftigare och trevligare på den här sidan i boken, som nu ser ganska trist ut. Sedan följer ett antal varierade övningar på ovanstående tema som å ena sidan är av samma typ och ser lite traggliga ut, men å andra sidan säkert är nyttiga att jobba igenom. En uppgift skiljer sig dock från de andra och känns lite extra intressant och ser ut som följer:

> Vad händer med ett bråks värde om
> a) täljaren multipliceras med 2
> b) nämnaren multipliceras med 2
> c) Både täljaren och nämnaren multipliceras med 2

Detta tycker jag är en bra uppgift ur förståelsesynpunkt, eftersom den sammanfattar några viktiga grundläggande egenskaper hos bråket.

5.1.7 Division av bråk

Division av bråk hittar man alltså inte förrän i läroboken för år 9. Detta tillägnas två sidor där den andra sidan kortfattat behandlar division med variabler.
På den första av dessa två sidor, under rubriken ”Division av bråk”, inleder man med följande text:

”Välj ett bråk, t ex $\frac{2}{5}$*. Låt täljare och nämnare byta plats.*

Det nya bråket, $\frac{5}{2}$*, kallas det **inverterade bråket** till* $\frac{2}{5}$*.”*

På detta följer några övningar på temat att invertera bråk, där även bråk i blandad form, heltal och även ett bråk med variabler ingår.
Efter dessa övningar visar man följande:

”När man dividerar bråk med varandra används ofta ett ”snett” bråkstreck som huvudbråk-streck. *T.ex.* $\frac{3}{4}/\frac{5}{8}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$.*”*

Med två pilar förtydligar läroboken vilka bråkstreck som är huvudbråkstreck.
Därefter följer exemplen som lyder så här:

Räkna ut a) $\frac{1}{3}/8$ b) $3/\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}/\frac{3}{4}$

a) $\frac{1}{3}/8=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 8}=\frac{1}{24}$ Att dela $\frac{1}{3}$ i 8 delar är detsamma som att räkna ut hur mycket $\frac{1}{8}$ är av $\frac{1}{3}$.

b) $3/\frac{1}{2}=\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 1}=6$

c) $\frac{1}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$ Att dividera med ett bråk är detsamma som att multiplicera med det inverterade bråket.

Några likartade övningsuppgifter med varierande tema följer på detta. Således har ingen av övningsuppgifterna någon vardagsanknytning eller någon annan koppling till något konkret. Mina sista frågor handlar om hur läroboken hanterar division av bråk med heltal, division av heltal med bråk och division av två bråk. Exempel (a), (b) och (c) ovan svarar alltså precis upp mot dessa frågeställningar.

Efter att ha studerat förklaringsmodellerna ovan, får jag en känsla av att det är viktigare att eleverna lär sig proceduren ”att multiplicera täljare med täljare och nämnare med nämnare”, än att de ska få en förståelse för operationernas innebörd. De numeriska exemplen visar egentligen bara hur man med hjälp av proceduren löser problemen.
Först och främst skulle jag gärna se en förklarande illustration i anslutning till exempel (a), särskilt med tanke på att det är första gången som eleverna stöter på denna typ av uppgift. Man skulle med fördel kunna använda ”chokladkakemodellen” för att konkretisera operationen. Studerar vi sedan den lilla texten till höger om exempel (a) så upplyser man om att det ena ”är detsamma som” det andra, men man förklarar inte varför.
Ett förslag vid introduktionen av den här typen av uppgifter, alltså vid division av ett bråk med ett heltal, är att läroboken också visar några alternativa sätt att tänka. Löser vi uppgiften (a) med Löwings modell (se teoriavsnittet) skulle lösningen se ut enligt följande:

$$\frac{1}{3}/8=\frac{1\cdot 8}{3\cdot 8}/8=\frac{8}{24}/8=\frac{8/8}{24}=\frac{1}{24}.$$

Detta är ju egentligen själva förklaringen till varför resultatet av operationen blir att nämnaren ska multipliceras med 8. Att operera med täljaren vid den här typen av uppgifter är ju egentligen mera logiskt eftersom täljaren betyder antalet enheter. Läroboken bör förstås inleda en sådan här diskussion med ett enklare exempel först, med en täljare som är delbar med divisorn, så att man inte behöver förlänga bråket först.

I exempel (b) skulle jag vilja ha en liten kompletterande text till höger om exemplet som frågar ”Hur många halvor ryms i tre hela?”. Varför inte konkretisera operationen med en figur också, som t ex att placera tre hela cirklar ovanför ett bråkstreck och en halv cirkel under? Att använda sig av innehållsdivision som kompletterande förklaring i exempel (b) tror jag vore bra, så att eleverna inser vad uppgiften egentligen betyder. (Jämför med Löwings metod med innehållsdivision, se teoriavsnittet).

Högst upp på sidan förklaras vad som menas med ett inverterat bråk. Studerar vi sedan lösningen av exempel (c) med tillhörande påstående ”Att dividera med ett bråk är detsamma…”, så finns det i exemplet inte någon egentlig förklaring till varför man ska multiplicera med det inverterade värdet. Det är väl egentligen för att man vill få talet ett i nämnaren som man genomför denna procedur, på följande sätt?

$$\frac{1}{2}/\frac{3}{4}=(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3})/(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3})=(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3})/1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

När läroboken på ett rigoröst sätt introducerar begreppet inverterat tal tycker jag också att man tydligare borde visa varför detta är av intresse i denna typ av uppgifter.

Vid behandling av division av två bråk, som i exempel (c), är Löwings recept att använda sig av innehållsdivision. Genom att inleda med några enkla exempel, som t ex $\frac{3/4}{1/4}$, och sedan gå vidare mot mer avancerade uttryck, så tror jag att eleverna kommer att få en mer relationell känsla för operationens innebörd.

De uppgifter som följer är alla av samma typ och kan kategoriseras som ”mekaniska” uppgifter. Ingen av uppgifterna kan kopplas till något konkret, eller har någon vardagsanknytning.

5.2 Läroboksserien Matematikboken XYZ

5.2.1 Läroböckernas uppläggning

Läroboksserien ”Matematikboken XYZ” Består av hela fem böcker för högstadiet, samt även träningshäften som hör till varje årskurs. Träningshäftena är avsedda för svagare elever. För årskurs 7 finns en lärobok, Matematikboken X. För årskurs 8 finns två läroböcker, Matematikboken Y grön och – Y röd, och för årskurs 9 finns två läroböcker, på motsvarande sätt benämnda Matematikboken Z grön och – Z röd. I den gröna och den röda boken löper avsnitten parallellt och de innehåller i stort sett samma moment, men med olika svårighetsgrad. Vi ser alltså redan här en nivågruppering vid val av bok. Vidare är övningsuppgifterna inom varje lärobok nivågrupperade i tre nivåer, A-, B-, och C-uppgifter, i stigande svårighetsgrad. Så här beskriver man de olika nivåerna:

> A: Flertalet elever väljer att börja med de relativt lätta A-uppgifterna.
>
> B: Elever som tycker att A-nivån är för lätt kan börja räkna B-uppgifterna direkt. A- och B-nivån innehåller liknande uppgifter, men A-uppgifterna är lättare.
>
> C: Efter A- och B-nivån har eleven möjlighet att gå vidare till C-nivån och möta större utmaningar.

Mot slutet av varje kapitel finns en sammanfattning. Denna följs av blandade uppgifter, varefter eleverna ska göra en diagnos, som dock inte går att hitta i denna lärobok. Efter diagnosen får eleverna antingen arbeta med avsnittet Träna mera eller med avsnittet Fördjupning. Utöver detta finns i varje kapitel ett avsnitt med rubriken Lite av varje. Detta avsnitt består av tre delar med uppgifter av nedanstående typ:

- Taluppfattning och huvudräkning
- Fundera och diskutera
- Gruppuppgift

Varje kapitel avslutas med ett avsnitt som heter Träna problemlösning, där eleverna ska diskutera i par eller i grupp och försöka lösa så många problem som möjligt.

Mina frågeställningar handlar om hur läroböckerna hanterar multiplikation och division av bråk. Detta introduceras och behandlas i Matematikboken Y röd, och behandlas inte i någon av de andra läroböckerna. Utgångspunkten bör därför vara att eleverna inte har några förkunskaper inom detta område när detta introduceras i Matematikboken Y röd.

5.2.2 Allmänt om bråkavsnittet, Matematikboken Y röd

I matematikboken Y röd påträffas bråkavsnittet i ett kapitel som heter ”Bråk och potenser”. På första sidan finns en bild på en jordgubbstårta med problemställningen hur tårtan ska skäras för att dela den lika mellan 12 personer. Bråkavsnittet inleds sedan under rubriken ”Räkna med bråk”, som kan ses som en repetition av bråkbegreppet. Med en bild på tre silverfärgade - och två guldfärgade mynt visas hur man skriver tre av fem mynt i bråkform. På samma sida behandlas även skrivsättet blandad form och hur några enkla tal i bråkform kan göras om till decimalform. Avsnittet fortsätter med förkortning och förlängning av bråk, något som illustreras med cirklar som delas i olika antal bitar. Sedan följer addition och subtraktion av bråk, både med olika nämnare och med bråk i blandad form.

Avsnittet avslutas med multiplikation av bråk och division av bråk, som mina frågeställningar berör. Till multiplikation av bråk tillägnas 4 sidor och till division av bråk tillägnas 3 sidor. Förklaringsmodellerna för multiplikation och division tar vardera cirka en sida i anspråk, och resten av sidorna (5 st.) består av uppgifter i stigande svårighetsgrad. För övrigt består dessa 7 sidor av tre bilder och en illustration. Bilderna har inte någon förklarande funktion, men de anknyter till någon av övningsuppgifterna och gör layouten lite luftigare och trevligare. Den enda förklarande illustration som finns visualiserar/konkretiserar multiplikation av två bråk. På det hela taget tycker jag att layouten ser lättsam och trevlig ut på dessa 7 sidor.

5.2.3 Multiplikation av bråk med ett heltal

Avsnittet inleds med rubriken ”Multiplikation av bråk”, följt av underrubriken ”Multiplikation av ett bråk med ett heltal”. Detta introduceras på följande sätt:

”En produkt kan alltid skrivas som en summa. Till exempel kan produkten $3 \cdot \frac{1}{5}$ *skrivas som* $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$*. Det betyder att* $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$*. Ett annat sätt att skriva samma sak är*

$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{5} = \frac{3}{5}$. *På samma sätt får vi att* $16 \cdot \frac{1}{2} = \frac{16 \cdot 1}{2} = 8$. *Lägg märke till att multiplikation av ett tal med* $\frac{1}{2}$ *är detsamma som att ta hälften av talet.”*

Att läroboken drar parallellen med produkten som en summa tycker jag är väldigt bra. På detta sätt är det enklare att inse att resultatet måste bli 3/5. Detta är också i enlighet med Löwings förslag (se teoriavsnittet) på metod att arbeta med den här uppgiftstypen, även om Löwing utgår från ett bråk där täljaren inte är 1. Från det alternativa skrivsättet, se ”Ett annat sätt att skriva…” ovan, framgår det tydligt att täljaren skall multipliceras med talet som står framför bråket. Att läroböckerna tydligt visar hur man ska skriva är naturligtvis bra, men man bör också poängtera och summera i klartext vad som faktiskt händer. Annars blir känslan den att det är viktigare att eleverna lär sig proceduren, och hur de ska skriva, än att de ska få en förståelse för operationens innebörd; d.v.s. instrumentell kontra relationell.

Vidare tycker jag att texten ovan är något kompakt, och jag tror att många av eleverna kan tycka att den är svår att läsa. Mitt förslag är att lufta upp texten med en konkretiserande illustration. Jag tycker dock att det är bra att man avslutar med att poängtera ”att multiplikation av ett tal med 1/2 är detsamma som att ta hälften av talet.” Både Löwings- och Mölleheds undersökningar (se teoriavsnittet) har visat att elever har svårt att tolka eller förstå denna typ av uppgift.

I det exempel som följer på detta multipliceras ett bråk i blandad form med ett heltal, vilket blir något svårare. Exemplet lyder så här:

Beräkna $9 \cdot 1\frac{1}{6}$

$9 \cdot 1\frac{1}{6} = 9 \cdot \frac{7}{6} = \frac{9 \cdot 7}{6} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$

Vi skriver $1\frac{1}{6}$ i bråkform. Före multiplikationen förkortar vi med 3.

(I läroboken har förkortningen markerats genom att man med röd färg har strukit siffran 9 i täljaren och siffran 6 i nämnaren, och på vanligt manér skriva siffrorna 3 och 2 istället).

I exemplet ovan har proceduren använts i det relevanta steget, och man visar hur man ska skriva. Har eleverna förstått idén bakom proceduren, d.v.s. varför talet 7 i täljaren ska multipliceras med talet 9, så kan det säkert vara bra att man i exemplet försvårar något och använder sig av ett bråk i blandad form. Förklaringsmodellen som läroboken har använt för den här uppgiftstypen är således först en inledande ”diskussion”. Sedan följer ett löst numeriskt exempel tillsammans med två korta kommentarer som förtydligar de olika stegen fram till slutresultatet. Jag gillar idén med en inledande diskussion, men texten får inte bli för lång eller kompakt.

5.2.4 Multiplikation av två bråk

Läroboken inleder med en diskussion där man frågar sig hur man gör när man multiplicerar två bråk med varandra. Som exempel tar man multiplikationen $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$. Detta illustreras på följande sätt:

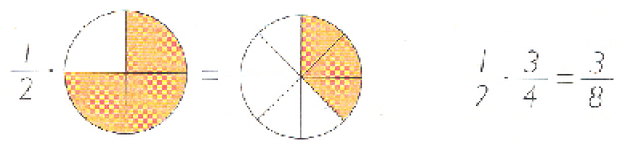


Illustration 5. (Undvall m.fl., 2002 s.69)

Sedan säger man så här:

"Den första cirkeln har färglagts till $\frac{3}{4}$*. Bilden får då motsvara bråket* $\frac{3}{4}$*.*
Att multiplicera $\frac{3}{4}$ *med* $\frac{1}{2}$ *är detsamma som att ta hälften av* $\frac{3}{4}$*, vilket är* $\frac{3}{8}$*.*
I den högra cirkeln har vi färglagt $\frac{3}{8}$*. Du ser att det är hälften så mycket av den högra cirkeln som är färglagd. Detta visar att* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$*."*

Illustrationen är god, den visar tydligt vilket resultat som fås när bråket 3/4 multipliceras med 1/2, nämligen 3/8. Men idén bygger på att läroboken använder sig av det faktum som poängteras ovan; att multiplikation av ett tal med 1/2 är detsamma som att ta hälften av talet. Jag skulle gärna se ytterligare ett exempel med två andra tal i bråkform, där det ena inte har värdet 1/2. Sedan multiplicerar man ihop dem och visar resultatet på liknande sätt med en illustration.
När man vill visa ett generellt sätt att ställa upp och räkna ut en viss typ av uppgift, som t ex den här, tycker jag att läroboken borde visa att detta sätt att räkna fungerar i åtminstone ett fall till. Annars blir känslan att läroboken lotsar eleverna fram till proceduren "täljare gånger täljare/nämnare gånger nämnare".

Exemplet som följer på detta lyder så här:

Beräkna $2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{4}$

$2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{8}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

Skriv först om bråken från blandad form till bråkform

Sedan kan du förkorta med 4.

(I läroboken har förkortningen markerats genom att man med röd färg har strukit siffran 8 i täljaren och siffran 4 i nämnaren, och på vanligt manér skriva siffrorna 2 och 1 istället).

Exemplet är löst på i stort sett motsvarande sätt som det exempel som behandlade Multiplikation av bråk med heltal. Här utgår man alltså nu från två bråk som både är i blandad form. Hela förklaringsmodellen med den inledande ”diskussionen”, följt av ett numeriskt exempel med några kommentarer påminner också väldigt mycket om den modell som användes beträffande Multiplikation av bråk med heltal. Uppgifterna som följer är som tidigare sagts uppdelade i olika svårighetsgrader, och de är i en lagom mängd. Några trevliga bilder dessutom gör att layouten ser lätt och luftig ut på dessa uppgiftsidor.

5.2.5 Division av bråk

Här inleder man återigen med en ”diskussion”. Man börjar så här:

”Divisionen 15/3 ger kvoten 5. Men även multiplikationen $15 \cdot \frac{1}{3}$ *ger resultatet 5.*

Vi ser alltså att $15/3 = 15 \cdot \frac{1}{3}$*. Divisionen omvandlas till en multiplikation där täljaren multipliceras med nämnarens inverterade värde. Det inverterade värdet till 3 är* $\frac{1}{3}$*,*

till 7 är det $\frac{1}{7}$ *och så vidare. Inverterade värden till bråk får man genom att låta täljare och nämnare byta plats. Det inverterade värdet till* $\frac{3}{5}$ *är* $\frac{5}{3}$*, till* $\frac{5}{7}$ *är det* $\frac{7}{5}$ *och så vidare.”*

Sedan ställer man i läroboken frågan hur man gör när man dividerar ett tal i bråkform.
Som exempel väljer man divisionen $4/\frac{3}{5}$.
Fortsättningen på resonemanget ser ut som följer:

”Vi skriver divisionen som $\dfrac{4}{\frac{3}{5}}$.

Om vi förlänger med $\frac{5}{3}$ *får vi talet 1 i nämnaren.*

$$\frac{4}{\frac{3}{5}} = \frac{4 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}} = \frac{4 \cdot \frac{5}{3}}{1} = 4 \cdot \frac{5}{3}$$

Vi ser även här att divisionen omvandlas till en multiplikation med nämnarens inverterade värde”

Denna ”diskussion” ovan tar en hel sida i anspråk i läroboken. Idén med en inledande diskussion tycker jag är bra men jag har en hel del åsikter om både form och innehåll på denna sida. Till att börja med, det är alldeles för mycket text på just den här sidan och jag tror att många elever inte orkar läsa den. Jag tycker ändå att delar av innehållet är bra. Att man visar hur en

division omvandlas till en multiplikation med nämnarens inverterade värde tycker jag är bra, särskilt som man gör det med både ett vanligt tal och ett bråktal i nämnaren.
Vidare, genom att läroboken presenterar hela (den stora) uträkningen ovan så tycker jag att det tydligare framgår varför man förlänger bråket med nämnarens inverterade värde, d.v.s. för att få talet ett i nämnaren. Sedan blir det uppenbart vad som blir resultatet av operationen: divisionen omvandlas till en multiplikation med nämnarens inverterade värde. Men vad jag saknar är konkretiserande illustrationer, så att eleverna kan se framför sig vad som händer när de räknar på denna typ av uppgifter. I den här boken delar man inte upp avsnittet i ”Division av ett bråk med ett heltal”, ”Division av två bråk” etc. Istället klumpar man ihop de olika uppgiftstyperna och arbetar med dem och löser dem parallellt med hjälp av den procedur (”multiplicera med inverterade värdet”) man nyss beskrivit. Även om bakgrunden till hur proceduren har växt fram har förklarats ordentligt i läroboken så blir känslan mer teoretisk än konkret och praktisk.

Margareta Löwings didaktiska upplägg känns därför avlägset här. Det finns inget här som påminner om hennes förslag att arbeta. I kommande exempel och övningsuppgifter finns heller inget som påminner om ett alternativt sätt att tänka, inte heller finns någon konkretiserande illustration. Tre exempel finns i detta avsnitt. De är alla lösta enligt samma modell och jag presenterar endast det första:

Beräkna $\frac{3}{4}/2$

$\frac{3}{4}/2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}=\frac{3}{8}$ Det inverterade värdet till 2 är $\frac{1}{2}$.

Exemplet har lösts med hjälp av proceduren. En kort kommentar finns till höger.

Uppgifterna som följer är av relativt ”mekanisk” karaktär på A och B-nivån. På C-nivån kommer det några textuppgifter som känns lite svårare. Dessa textuppgifter har vardagsanknytning och känns lite mer spännande än uppgifterna på A- och B-nivån.

5.3 Kort sammanfattning av analys

Vid en jämförelse mellan de två läroboksseriernas sätt att presentera och hantera Multiplikation och Division av bråk, så kan jag konstatera att upplägget skiljer sig en del åt mellan dem.

Matematikboken XYZ inleder båda avsnitten, Multiplikation respektive Division av bråk, med en helsida ”diskussion”, där man förklarar och stödjer upp några numeriska exempel. Båda dessa diskussionssidor tycker jag har ett bra och relevant innehåll. Men då det är mycket text och totalt endast en konkretiserande illustration på de båda sidorna, ger det ett alltför kompakt och teoretiskt intryck. På den första av dessa två sidor, vid presentationen av Multiplikation av ett bråk med ett heltal, hittar vi den enda förklaringsmodell, båda läroboksserierna inräknat, som påminner något om Madeleine Löwings förslag på metod att arbeta med denna uppgiftstyp.

Matte Direkt använder en mer komprimerad förklaringsmodell, här har man inte någon inledande diskussion. Istället går man mer rakt på sak och visar i de numeriska exemplen hur man ska skriva och ställa upp för att lösa uppgifterna. I gengäld så stödjer man upp detta med goda illustrationer.

De numeriska exempel som läroböckerna har valt att visa är i stort sett presenterade på samma sätt i båda läroboksserierna. Exemplen är lösta enligt gängse rutiner med några korta anvisningar eller förtydliganden i text som ska visa och förklara stegen fram till slutresultatet. Matematikboken XYZ har valt att ofta använda bråk i blandad form i exemplen, vilket kan vara lite olämpligt för svagare elever, då det blir en försvårande komponent.

Beträffande Division av bråk så har båda läroboksserierna valt en väldigt teoretisk förklaringsmodell, helt utan konkretiserande illustrationer. Matematikboken XYZ lyckas visserligen få fram den bakomliggande idén med att ”Multiplicera med inverterade värdet”, men det sammanfattade intrycket hos båda läroboksserierna är att det blir klart mer teoretiskt än konkret och praktiskt. Studerar man sedan övningsuppgifterna som följer så består detta intryck. De enda övningsuppgifter som har någon konkret och praktisk koppling hittar vi först i två uppgifter på C-nivån i Matematikboken Y röd. Övriga övningsuppgifter som hör till Division av bråk kan i båda läroboksserierna kategoriseras som ”mekaniska” uppgifter, och utan någon koppling till något konkret eller praktiskt.

Layouten hos de analyserade avsnitten känns för mig något luftigare och trevligare hos Matematikboken Y röd än hos Matte Direkt År 8-9, även om de två nämnda diskussionssidorna i Matematikboken Y röd känns lite tunglästa. Speciellt trevligt är att Matematikboken Y röd har placerat några trevliga foton på uppgiftssidorna för att lätta upp innehållet.

6. Diskussion

De två undersökningar som jag tagit del av (Löwing, 2006 och Möllehed, 2001), och som jag har presenterat i teoriavsnittet visar att elever har svårt att utföra multiplikationer och divisioner med bråk. Jag har nu studerat och analyserat de avdelningar i läroböckerna där multiplikation och division med bråk förekommer, Matte Direkt åk 8, Matte Direkt åk 9 och MatematikbokenY röd. Mina frågor gäller hur läroböckerna hanterar följande problem:

- Multiplikation av ett bråk med ett heltal
- Multiplikation av två bråk
- Division av ett bråk med ett heltal
- Division av ett heltal med ett bråk
- Division av två bråk

Det första jag lägger märke till är hur lite utrymme i böckerna detta område får. I Matte Direkt år 8 och år 9 tar förklaringsmodellerna för ovanstående problemställningar totalt ca 1.5 sidor i anspråk räknat från båda böckerna tillsammans. I Matematikboken Y röd tar förklaringsmodellerna ca 3 sidor i anspråk för ovanstående problemställningar. En anledning till att förklaringsmodellerna intar större plats i Matematikboken Y röd beror på att man har valt att inleda med en ”diskussion” som tar en hel sida i anspråk för vardera multiplikation och division av bråk. Dessa diskussioner är innehållsmässigt bra tycker jag, men det blir väldigt mycket text. Matematikboken Y röd har endast en illustration som visserligen är god men den visar bara resultatet av en operation i ett specialfall, nämligen vid multiplikation av två bråk när ena bråket är 1/2.

Matte Direkt har valt en väldigt komprimerad förklaringsmodell, de går rakt på sak och visar hur man ska skriva för att lösa uppgifterna, och vid multiplikation av bråk stödjer man upp detta med goda illustrationer. Vid multiplikation av två bråk använder man hela tre illustrationer för att konkretisera och övertyga läsaren på vilket sätt man kan räkna för att lösa problemen. Just dessa illustrationer är en stark sida hos Matte Direkt, tycker jag.

Studerar vi ”Multiplikation av ett bråk med ett heltal”, så ser vi hos den förklaringsmodell som Matematikboken Y röd har, ett inslag av Madeleine Löwings metod att arbeta med den här typen av uppgifter. Går vi sedan in i Matte Direkt år 8 och studerar samma problemställning så får jag först en känsla av ren lotsning. Man visar hur man ska skriva och ställa upp; skriv så här, och sen så här, osv. Men den goda illustrationen förbättrar det sammantagna intrycket avsevärt.

Till division av bråk, som rör mina tre sista frågeställningar ovan, finns inte en enda konkretiserande illustration i någon av de analyserade läroböckerna. ”Det är viktigt att konkretisera problemen för eleverna”. (Möllehed i Magnusson, 2002 s.53)
Matte Direkt inleder ”Division av bråk” med att kortfattat förklara vad ett inverterat tal är. Sedan framgår det inte alls vad man behöver detta till i exemplen nedanför.
Dessa tre numeriska exempel består av just de tre uppgiftstyperna som hör till mina tre frågeställningar beträffande division av bråk. Exemplen är lösta med den procedur man tycker sig ha förklarat, men jag tror att många elever ändå inte förstår varför de ska ”multiplicera med inverterade värdet”.

Matematikboken Y röd inleder ”Division av bråk” med en ”diskussion”, en helsida text utan bilder eller illustrationer, vilket känns väl mastig att läsa. ”En kompakt text utan bilder och med många matematikord kan ge ett negativt intryck”. (Dahlström m. fl., 2003) Men innehållet på denna sida är bra tycker jag, man förklarar först relationen mellan division och multiplikation med inverterade värdet. Sedan visar man ett exempel där själva grundidén i resonemanget finns, att förlänga bråket så att man får talet ett i nämnaren. Efter detta presenteras tre exempel av de tre olika uppgiftstyperna i division av bråk där man har löst uppgifterna genom att multiplicera med inverterade värdet. Det sammanfattade intrycket jag får hos denna förklaringsmodell är ändå att det blir väl teoretiskt.

De förklaringsmodeller som böckerna använder är relativt olika varandra. Matte Direkt har sin starka sida i de fina illustrationerna för att konkretisera multiplikation av bråk, och Matematikboken Y röd har de inledande diskussionerna som visserligen är väl mastiga i text, men har ett bra innehåll.

Men gemensamt för både Matte Direkt år 8-9 och Matematikboken Y röd är att det ändå känns som att det är viktigare att man snabbt ska lära sig en procedur för att lösa uppgifterna, än att förstå de matematiska operationernas innebörd. Således ett instrumentellt synsätt framför ett relationellt synsätt. Denna känsla får jag först och främst genom den kortfattade presentationen av de aktuella avsnitten. Vidare ser jag inga alternativa förklaringsmodeller så att eleverna kan se innebörden av operationerna ur en annan synvinkel. Dessutom får jag ibland en känsla av att läroböckerna lotsar eleverna fram till en procedur som de ska lära sig för att lösa uppgifterna. Denna känsla växer sig starkare på de sidor som behandlar division av bråk, där heller inga konkretiserande illustrationer finns.

Efter att ha översiktligt studerat bråkavsnitten i de övriga böckerna i dessa två läroboksserier för högstadiet, och även i några böcker från mellanstadiet, har jag upptäckt, att i de flesta böckerna läggs mycket energi på att jämföra storleksordning på bråk, och förlängning och förkortning av bråk. Detta är sedan ett ständigt återkommande tema i varje årskurs.
När sedan de läroböcker som jag har analyserat introducerar multiplikation och division av bråk i Åk 8-9 gör man det väldigt kortfattat. Man presenterar inga alternativa sätt att lösa uppgifterna, inga alternativa sätt att tänka. Det mesta presenteras kortfattat och rakt på sak.
Jag vill därför påstå att båda dessa läroboksserier som jag analyserat presenterar bråkavsnitten som rör mina frågeställningar ovan ur ett mer instrumentellt – än ur ett relationellt perspektiv.

En lite fundering jag har är om det finns elever som inte alls arbetar med multiplikation och division av bråk. Hos Matte Direkt år 8 hittar vi visserligen multiplikation av bråk i (den gröna) grundkursen men division av bråk, som vi hittar i Matte Direkt år 9, är rödmärkt och räknas som fördjupning. Hos Matematikboken XYZ finner vi multiplikation av bråk i Y röd som i första hand ”är avsedd för elever med intresse och goda färdigheter i matematik”, enligt författarna. Kan denna nivågruppering, som hos Matematikboken XYZ dragits till sin spets, förorsaka att de svaga eleverna lär sig mindre och de starka eleverna lär sig mer?

Beträffande division av bråk har jag särskilt lagt märke till, att i läroboken Matte Direkt år 9 är alla övningsuppgifterna av samma typ, och av en ”mekanisk” karaktär.
I Matematikboken Y röd är övningsuppgifterna på A- och B-nivån också av en relativt ”mekanisk” karaktär, medan det först på C-nivån kommer några textuppgifter, som visserligen känns lite svårare, men de har vardagsanknytning och känns betydligt mer spännande. Följden av detta kan bli att de svagare eleverna endast arbetar med uppgifter av ”mekanisk” karaktär, medan de starkare eleverna får arbeta med mer spännande textuppgifter och dessutom får vardagsanknytningen på köpet. Man får samtidigt vara medveten om att textuppgifter är kognitivt

krävande. Jag hänvisar till Mölleheds undersökning i teoriavsnittet; ”Oförmåga att förstå texten var det vanligaste ”felet””. (Nowotny, 2001)

Vid en jämförelse med Löwings förslag på metod att arbeta med bråk så ser jag, som tidigare sagts, ett litet spår av detta i Matematikboken Y röd, vid presentationen av Multiplikation av ett bråk med ett heltal. Men ser man i stort för båda läroboksserierna så arbetar de inte alls efter Löwings modell. De alternativa sätt att tänka och lösa uppgifterna på som Löwing presenterar, som att operera med täljaren vid division av ett bråk med ett heltal, att använda sig av innehållsdivision, etc., lyser med sin frånvaro. De numeriska exempel som läroböckerna väljer att inleda med innehåller ofta lite krångligare siffror som gör det svårare att konkretisera med alternativa förklaringar och synsätt, som t ex enligt Löwings modell. Dessa exempel låter sig hellre lösas med hjälp av en procedur.

Konstateras kan också att båda läroboksserierna arbetar med multiplikation och division av bråk relativt isolerat ifrån varandra. Detta gör att kopplingen mellan de olika uppgiftstyperna blir vag. Sägas bör dock att Matematikboken Y röd faktiskt uppmärksammar och visar hur en division omvandlas till en multiplikation med nämnarens inverterade värde. Men det finns en viss risk att många elever inte orkar läsa hela den sidan där detta presenteras.
På det sätt som särskilt Division av bråk har presenterats i läroböckerna är det sammanfattade intrycket för båda läroboksserierna att det blir mer teoretiskt än konkret och praktiskt. På den nivå som eleverna befinner sig på så tror jag att detta kan gynna behovet av procedur för att lösa uppgifterna, på bekostnad av förståelsen. Det instrumentella går före det relationella, således.

Beträffande layouten hos de analyserade bråkavsnitten kan sägas att Matematikboken Y röd har en luftig, färgglad och trevlig layout. Några bilder lättar upp uppgiftssidorna. Men det är lite för mycket sammanhängande text på två av sidorna tycker jag, och *endast* en konkretiserande illustration. Layouten hos de analyserade bråkavsnitten i Matte Direkt känns något mer kompakt än hos Matematikboken XYZ. Det är något färre övningsuppgifter och inte av speciellt varierande typ. De fyra illustrationerna är däremot mycket goda, tycker jag.

Med en så kortfattad behandling som läroböckerna ger av Multiplikation och division av bråk, så tror jag att det är svårt för eleverna att enbart med läroböckernas hjälp få en djupare insikt i hur de matematiska operationerna hänger ihop. Det ligger förstås då på den undervisande läraren att utveckla detta genom att visa hur sambanden hänger ihop med olika förtydliganden och alternativa förklaringsmodeller, samt att visa på andra sätt att se och tänka. Dessutom bör läraren förse eleverna med kompletterande uppgifter som kan stimulera och bidra till en utveckling av djupare kunskapskvaliteter.

Ett förslag jag har är att läroböckerna skulle kunna introducera Multiplikation och division av bråk något tidigare på högstadiet där man inleder med enkla exempel som kan konkretiseras med goda illustrationer, som t ex enligt ”chokladkakemodellen”. Här tycker jag att läroböckerna med fördel kan arbeta med utgångspunkt i Löwings didaktiska modell vid introduktionen av detta område. Sedan kan läroböckerna med denna bakgrund gå vidare mot mer allmänna uttryck samtidigt som man försöker att konkretisera problemen i så hög utsträckning som möjligt.

De avsnitt ur läroböckerna jag har beskrivit och analyserat har som sagts lite olika upplägg. Själv tycker jag att Matte Direkt har mycket goda illustrationer för Multiplikation av bråk.

Däremot så tycker jag att övningsuppgifterna i det analyserade avsnittet hos Matte Direkt överlag är ganska trista och av en ”mekanisk karaktär”.
Matematikboken Y röd har en väldigt god intention med de inledande ”diskussionerna”, och den idén skulle jag själv gärna använda. Men dispositionen på dessa sidor skulle jag försöka ändra på så att det blir mindre sammanhängande text. Här skulle jag gärna se några fler illustrationer som konkretiserar textinnehållet. Vikten av att konkretisera är ju också helt i enlighet med vad både Löwing (2006) och Dahlström m. fl. (2003) framhåller i teoriavsnittet.

Mitt eget val av lärobok skulle troligen falla på Matematikboken Y röd som grund men med ett större inslag av goda illustrationer, t ex av den typ som finns i Matte Direkt år 8. Anledningen till detta val är att layouten hos de analyserade avsnitten är något mindre kompakt i Matematikboken Y röd än i Matte Direkt. Speciellt tycker jag att uppgiftssidorna ser trevligare ut i Matematikboken Y röd där man också har några fotografier som lättar upp innehållet. För mig känns alltså formaspekten viktig när jag jämför dessa avsnitt i de olika läroböckerna. Materialet ser helt enkelt ”mindre svårt” och ”mer roligt” ut i Matematikboken Y röd. Detta stämmer ju också väl överens med vad Dahlström m. fl. kommit fram till i sin läromedelsanalys (se teoriavsnittet) apropå vikten av formaspekten:

> *”Detta kan tolkas så, att bilder och layout har stor betydelse och formaspekten bör ses som en viktig egenskap hos läroboken”. (Dahlström m. fl., 2003)*

Dessutom tycker jag att övningsuppgifterna på det hela taget ser mer varierade ut i Matematikboken Y röd. Som blivande lärare i matematik så tror jag naturligtvis att både jag själv och eleverna gynnas av att använda en lärobok som har både en trevlig form och ett bra innehåll.

Avslutningsvis vill jag säga att det har varit lärorikt att studera läroböckernas hantering av detta område inom bråkräkning, särskilt mot bakgrund av den teori jag fått mig till livs genom litteraturen. Det kommer att bli spännande att följa de nya grepp som läromedelsförfattarna kommer att använda sig av i den fortsatta utvecklingen av nya läromedel i matematik i allmänhet och i bråkräkning i synnerhet.

Källor och litteratur

Carlsson, Synnöve & Hake, Karl-Bertil & Öberg, Birgitta (2002). *Matte Direkt år 8*. Stockholm:Bonniers.

Carlsson, Synnöve & Hake, Karl-Bertil & Öberg, Birgitta (2002). *Matte Direkt år 9*. Stockholm:Bonniers.

Dahlström, Jan & Stenmark, Mattias & Lahtinen, Ulla (2003). *Idag får ni räkna framåt i era böcker!*. Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Vasa.

Löwing, Madeleine (2006). *Matematikundervisningens dilemman; Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund:Studentlitteratur.

Magnusson, Eva (2002). *Omognad bakom mattefel*. Forskning och framsteg 1/02.

Nilsson, Margita (1996). *Matematikundervisning i gymnasieskolan 1*. Malmö:Lärarhögskolan.

Nowotny, Claus (2001). *Oförmåga att lösa matteproblem bottnar ofta i allmän omognad – visar avhandling*. [www dokument]. http://www.mah.se/upload/GF/pme/20010927.PDF

Skolverket (2000). *Grundskolan. Kursplaner och betygskriterier*. Stockholm:Fritzes.

Skolverket (2003). *Lusten att lära –med fokus på matematik*. Stockholm:Skolverket
.
Skolverket (2003b). *Lusten att lära –med fokus på matematik*. Stockholm:Skolverket.

Thompson, Jan (1991). *Historiens matematik*. Lund:Studentlitteratur.

Undvall, Lennart & Olofsson, Karl-Gerhard & Forsberg, Svante (2002). *Matematikboken Y röd*. Stockholm:Liber.