



Avdelningen för miljö, energi och byggteknik

Gunnar Rasmusson

Analys av tryckslag i rörsystem

Analysis of waterhammer
in pipeline systems

Examensarbete 15 poäng
Energi och installationsingenjörsprogrammet

Datum: 06-06-27
Handledare: Jan Forsberg
Examinator: Fredrik Wikström

Sammanfattning

När en rörledning skall dimensioneras måste den designas för att tåla de tryck som uppstår under stationära förhållanden. Ledningen måste också klara de tryck som kan uppstå under ickestationära förhållanden, t ex då en ventil stänger eller öppnas. Om en ventil stänger och flödet minskar så omvandlas vätskans rörelseenergi till tryckenergi. Om detta sker snabbt så kallas detta för tryckslag. De tryck som uppstår då kan leda till skador på rörledningar och annan utrustning i ett system.

Dessa tryck kan simuleras med hjälp av datorprogram. Det finns också förenklade metoder för att beräkna dessa tryck. Dessa förenklade metoder är dock bara giltiga under speciella omständigheter.

En ca 6000 m lång råvattenledning mellan sjön Hällungen i Stenungsunds kommun och en reservoar i Stenungsund har nyligen dimensionerats med hjälp av en förenklad beräkningsmetod för tryckslag. Det finns dock en misstanke att dessa metoder ger felaktiga resultat, vilket kan göra att ledningen blir över eller underdimensionerad.

Studiens syfte är att ta reda på hur mycket resultaten från de förenklade beräkningsmetoderna skiljer sig från mer noggrannare simuleringar, samt under vilka förutsättningar dessa metoder gäller.

Två förenklade metoder beskrivs i rapporten. Rapporten beskriver även en metod som kallas karakteristikmetoden, som är en metod som de flesta kommersiella programvaror använder. Dessa metoder tillämpas på det aktuella fallet och resultaten jämförs.

Resultaten visar att de förenklade metoderna bara gäller under vissa speciella fall.

Rapporten bekräftar att dessa ekvationer bara kan användas under speciella fall och med stor försiktighet. De kan dock ofta fungera som en första koll för att få reda på ungefärliga värden. När dessa förenklade metoder går att använda är bl a kopplad till hur fort en ventil stänger samt ledningens periodtid, d.v.s. den tid det tar för en tryckvåg att gå fram och tillbaka i en ledning.

Abstract

When a pipeline will be dimensioned it has to be designed to stand the strain of the pressure that arise during stationary conditions. The pipeline also has to manage the pressures that can arise during nonstationary conditions, for example when a valve is opened or closed.

If a valve is shut and the flow is reduced, the momentum is transformed to pressure energy. If this happens quickly it is called waterhammer.

The pressure witch can arise under waterhammer can cause damage to the pipeline and other equipment in a system.

These pressures can be simulated with computer programs.

There are also simplified methods to calculate those pressures. Those simplified methods are only valid in special cases.

A 6000 m water pipeline between the lake Hällungen and a reservoir in Stenungsund has recently been dimensioned with a simplified method.

There is a suspect that those methods yield wrong results, witch can lead to an over or under dimensioned pipeline.

The purpose of this study is to find out how much the results from the simplified methods differ from simulations, and when those simplified methods are valid.

Two simplified methods are described in the report.

The report also describes a method that is called the method of characteristics witch is a method that most commercial software uses.

The water pipeline is simulated in a commercial software and in an own developed Matlab program.

The results from the simulations are compared with the results from the simplified methods and an evaluation is done.

The report confirms that the simplified methods only can be used in special cases, and that they only give approximate values of the pressures.

When those simplified methods can be used depends on how fast the valve is closed, and the period time of the pipeline, i.e. the time it takes for a pressure wave to travel forward and back trough the pipeline.

Beteckningar	5
1. Inledning	6
1.1 Bakgrund	6
1.2 Syfte	6
1.3 Mål	6
1.4 Metod	6
1.5 Avgränsningar och förutsättningar	6
2. Vad är tryckslag.....	7
3. Beräkningsmetoder för tryckslag	9
3.1 Juokowskis ekvation.	9
3.2 Stelkroppsmetoden.....	10
3.3 Karakteristikmetoden för 1D-strömning	11
3.4 Finita differensekvationer för numerisk lösning	13
4. Beräkningsfall	15
5. Simulering och tillämpning av förenklade metoder	17
5.1 Stelkroppsmetoden.....	17
5.2 Juokowskis ekvation	17
5.3 Simulering i Flowmaster2	18
5.4 Simulering i Matlab	19
6. Resultat	21
6.1 Alternativ 1.....	21
6.2 Alternativ 2.....	22
6.3 Alternativ 3.....	22
7. Slutsats/Diskussion.....	23
8. Källförteckning.....	25
Bilaga 1. Resultat från Flowmaster2	26
Bilaga 2. Resultat från Matlab	29
Bilaga 3. Härledning av kontinuitetsekvationen.	32
Bilaga 4. Härledning av rörelseekvationen.....	35
Bilaga 5. Karaktäristikmetoden.....	37
Bilaga 6. Matlab-program.....	39

Beteckningar

Följande beteckningar används i rapporten om inte annat anges.

A = Area [m^2]

a = Våghastighet [m/s]

b = Godstjocklek [m]

D = Ytterdiameter [m]

d = Innerdiameter [m]

E = Elasticitetsmodul [GPa]

f = Friktionskoefficient [1]

g = Tyngdacceleration [m/s^2]

h = Lokalt statiskt tryck [m]

H = Trycknivå (h+z) [m]

K = Förlustkoefficient över ventil [1]

k = Bulkmodul [Pa]

L = Längd [m]

M = Rörelsemängd [Kg/m/s]

m = Massa [kg]

p = Statiskt tryck [Pa]

Q = Flöde [m^3/s]

t = Tid [s]

v = Flödeshastighet [m/s]

x = Sträcka [m]

z = Höjd [m]

ρ = Densitet [Kg/m^3]

τ = Skjuvspänning [N/m^2], Ventilöppning [1]

1. Inledning

I ett rörsystem med ett strömmande medium kan det uppstå fluktuationer i tryck. Detta kan ske av många olika anledningar, t ex när en ventil stängs och mediets flödes hastighet därför ändras. Om dessa förändringar sker snabbt kallas detta för tryckslag.

Dessa tryck kan simuleras med hjälp av för ändamålet utvecklade datorprogram. Det finns också förenklade metoder för att beräkna dessa tryck.

En vattenledning mellan sjön Hällungen och en reservoar i Stenungsund har dimensionerats med en förenklad metod som kallas Juokowskis ekvation. Ledningen är ca 6000 m lång och är dimensionerad för ett flöde på ca 450 l/s.

1.1 Bakgrund

De tryck som kan uppstå vid tryckslag i en rörledning kan orsaka skador på rörledningar och annan utrustning. Tryckslag är därför ofta av dimensionerande vid konstruktion av rörsystem. Teorin bakom beräkningarna för tryckslag är relativt komplicerad. Därför används ofta förenklade metoder.

De förenklade metoderna innebär en del förenklingar och approximationer som gör att resultatens exakthet kan ifrågasättas, vilket kan göra att systemet blir över eller underdimensionerat.

1.2 Syfte

Syftet är att få en ökad förståelse för de fenomen som orsakar tryckslag samt för den teori som ligger till grund för beräkningarna.

1.3 Mål

Få vetskap om hur mycket resultaten från de förenklade beräkningsmetoderna skiljer sig från datorsimuleringar, samt under vilka förhållanden som dessa metoder är giltiga.

1.4 Metod

Arbetet börjar med att en litteraturstudie görs. Den teori som ligger till grund för tryckslagsberäkningar sammanställs. Utifrån den sammanställda teorin byggs en modell upp i Matlab och ett fall simuleras. Fallet simuleras även i en kommersiell programvara för tryckslag.

Resultaten från simuleringarna samt de förenklade metoderna jämförs sedan och en utvärdering görs.

1.5 Avgränsningar och förutsättningar

Två förenklade metoder kommer att behandlas. Dessa är en metod som kallas för Juokowskis ekvation, samt stelkroppsmetoden, där vätskan betraktas som okompressibel och rörväggarna oelastiska.

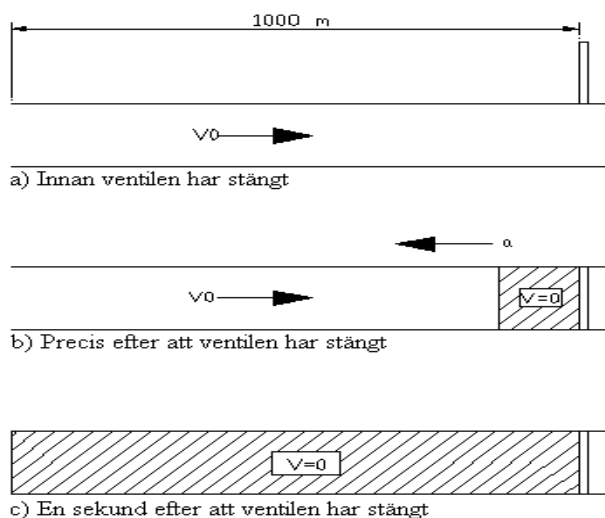
Dessa metoder kommer att jämföras mot simuleringar i en kommersiell programvara som heter Flowmaster2 samt ett egenutvecklat Matlabprogram. Inga jämförelser görs mot verkliga värden.

2. Vad är tryckslag

Tryckslag, även kallat trycktransienter, är ett vanligt förekommande fenomen i rörledningar med strömmande vätska. Tryckslag kan uppstå vid snabba flödesförändringar, t ex vid en plötslig strypning eller öppning av en ventil eller vid start och stopp av en pump. De kan också uppstå om vätskan tvingas göra en hastig riktningssändring. När mediets hastighet ändras omvandlas vätskans rörelsemängd till en tryckökning eller tryckminskning, dvs. rörelseenergin omvandlas till tryckenergi.

Pga. att fluiden är kompressibel och röret elastiskt kommer inte all vätska stanna på en gång när en ventil hastigt stängs. När vätskan närmast ventilen har stannat kommer den efterföljande vätskan fortfarande vara i rörelse. Detta gör att det fortplantar sig en tryckvåg i röret.

Figur 2-1 föreställer ett rör med längden 1000 m med en strömmande vätska med hastigheten V_0 och en ventil i den högra änden.



Figur 2-1. Rör med strömmande vätska med ventil som stängs hastigt.

När ventilen stängs hastigt i änden av röret kommer vätskan närmast ventilen att stanna. Vattnet närmast ventilen komprimeras nu av vätskan uppströms, som fortfarande rör sig. Detta orsakar en lokal tryckökning som gör att rörväggarna töjs och vätskan komprimeras och en tryckvåg med hastigheten α kommer att fortplanta sig i rörledningen.

Om tryckvågens hastighet är 1000 m/s kommer tryckvågen att nå rörets övre ände efter en sekund och all vätska har stannat upp.

Nu kommer den komprimerade vätskan och den uttänjda rörväggen göra så att vätskan trycks tillbaka och flödet ändrar riktning. Tryckvågen kommer då att vända och gå i motsatt riktning. Detta upprepas nu om och om igen tills vågen dämpas ut av friktionen mot rörväggarna och av viskösa krafter.

Den tid det tar för vågen att gå från ena änden till den andra och komma tillbaka kallas för rörets periodtid och kan skrivas¹.

$$T_p = \frac{2L}{a} \quad (2-1)$$

Hastigheten på den våg som utbreder sig påverkas både av rörets elasticitet (E-modulen) och av vätskans bulkmodul (kompressibiliteten). När trycket ökar kommer vätskan att komprimeras. Pga. rörväggens elasticitet kommer denna att utvidgas. Detta gör att rörmaterialets E-modul även inverkar på vågens utbredningshastighet.

Om fluiden skulle vara helt okompressibel och röret helt oelastisk, skulle all vätska stanna på en gång om ventilen stängs plötsligt. Då skulle våghastigheten vara oändligt stor.

¹ Fluid transients in pipeline systems sidan 10.

3. Beräkningsmetoder för tryckslag

Vid beräkning av tryckslag är rörelsemängdekvationen och kontinuitetsekvationen de grundläggande ekvationerna.

Kontinuitetsekvationen baseras på principen om massans oförstörbarhet. Det är en fundamental princip i studier av strömmande medier. Den säger att massan av en given mängd fluid alltid är konstant, oavsett om trycket eller hastigheten ändras.

Rörelsemängdekvationen baseras Newtons andra lag och säger att rörelsemängdförändringen per tidsenhet är lika med kraften som verkar på kroppen eller volymen.

Dessa två ekvationer beskriver flödesförloppet och bildar tillsammans två partiella differentialekvationer. Detta ekvationssystem har inte någon analytisk lösning, vilket gör att en numerisk metod måste användas.

P.g.a. av ekvationernas komplexitet används ofta förenklade ekvationer och tumregler som går att lösa analytiskt.

Det finns ett flertal olika förenklade metoder för att bestämma de tryck som kan uppstå. Dessa metoder är dock ofta bara giltiga under speciella omständigheter och vid enkla fall. Numera har datorsimuleringar blivit alltmer vanliga. Programvarorna som används är dock oftast dyra och kräver kompetens hos personalen. Därför används ofta de förenklade metoderna fortfarande.

I nästföljande kapitel beskrivs några av de metoder som kan användas för att analysera trycktransienter i rörsystem.

3.1 Juokowskis ekvation.

Om en ventil stänger hastigt kommer en tryckvåg att utbreda sig med hastigheten a . Se figur 2-1. Fluiden vid rörets inlopp kommer att fortsätta strömma med hastigheten V_0 tills tryckvågen har hunnit till inloppet. Tiden det tar för all vätska att stanna är alltså L/a sekunder, dvs. en sekund i detta fall. Det tar alltså en sekund för all vätska att stanna även om ventilen stänger på t ex 0,1 sekunder.

Om en rörelsemängdsbalans görs på kontrollvolymen i figur 2-1 fås

$$\Delta p = \frac{mV_0 - mV_2}{t} = \frac{m\Delta V}{t} \quad (3-1)$$

Då vätskans massa och tiden t kan skrivas som

$$m = \rho AL, \quad t = \frac{L}{a} \quad \text{så erhålls, om trycket } p \text{ görs om till } h \text{ i meter vattenpelare:}$$

$$\Delta h = \frac{a\Delta V}{g} \quad (3-2)$$

Våghastigheten a beräknas med följande ekvation²

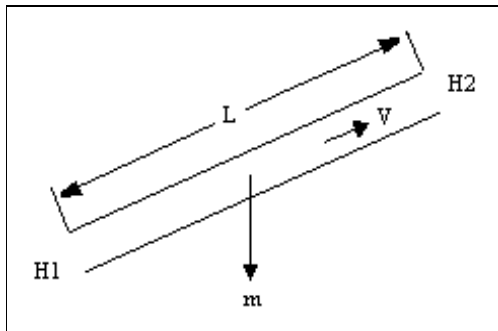
$$a = \sqrt{\frac{\frac{k}{\rho}}{1 + \frac{d \times k}{b \times E}}} \quad (3-3)$$

Ekvation 3-2 kallas för Juokowskis ekvation och beskriver den högsta möjliga tryckökning som kan uppstå vid en plötslig flödesförändring.

Om tryckvågen hinner reflekteras vid andra änden av röret och återvända till ventilen innan ventilen har stängt kallas det för långsam ventilstängning. I detta fall kommer inte hela det tryck som Juokowskis ekvation ger att utvecklas.³ Juokowskis ekvation är alltså bara giltig vid snabb ventilstängning, d.v.s. om ventilen stänger på kortare tid än rörets periodtid.

3.2 Stelkroppsmetoden

Under en långsam flödesförändring kan rörväggarna ofta betraktas som helt oelastiska och massan som lagras i systemet pga. kompression av vätskan och rörväggarnas elasticitet kan försummas. Våghastigheten blir då oändligt stor och vätskan kan betraktas som en solid. Newtons andra lag applicerad på röret i figur 3-1 ger



Figur 3-1. Stelt rör med längden L och strömmande fluid med hastigheten v .

$$H_2 - H_1 + h_f = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} \quad (3-4)$$

Där H_1 och H_2 är trycknivån, d.v.s. lokalt statiskt tryck + höjd över en referensnivå och h_f är tryckförlusterna.

² Introduction to fluid mechanics sidan 244

³ Fluid transients in pipeline systems sidan 10

Om H_1 och H_2 varierar med tiden och hastigheten måste en numerisk integrering användas.⁴
Om H_1 - H_2 är konstant kan en integrering göras.

Om ekvation 3-4 integreras över ett tidsintervall t , då flödet ändras från v_1 till v_2 erhålls⁵

$$t = \frac{L}{g\sqrt{C_f(H_2 - H_1)}} \left(\tan^{-1} v_1 \sqrt{\frac{C_f}{H_2 - H_1}} - \tan^{-1} v_2 \sqrt{\frac{C_f}{H_2 - H_1}} \right) \quad (3-5)$$

Där

$$C_f = \frac{fL}{2gD}$$

För att ovanstående teori skall gälla måste tiden som flödesförändringen äger rum vara mycket större än rörets periodtid.⁶ Tiden skall helst vara mer än 20 ggr rörets periodtid.

3.3 Karakteristikmetoden för 1D-strömning

Karakteristikmetoden är en metod för att lösa partiella differentialekvationer av hyperbolisk typ och är vanlig vid analys av trycktransienter i rörsystem. De flesta kommersiella dataprogram för beräkning av trycktransienter använder sig av denna metod.

En noggrannare beräkning av tryckslag baseras på kontinuitetsekvationen och rörelsemängdsekvationen. Dessa ekvationer bildar tillsammans två partiella differentialekvationer. Detta ekvationssystem har ingen analytisk lösning.

Karakteristikmetoden omvandlar dessa ekvationer till ordinära differentialekvationer. Dessa ekvationer är bara giltiga längs vissa karakteristiska linjer i x - t planet. De ordinära differentialekvationerna omvandlas sedan till finita differensekvationer, dvs. de integreras över ett kort tidssteg. De finita differensekvationerna kan sedan lösas numeriskt.

Kontinuitetsekvationen för endimensionell rörströmning kan skrivas som.

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3-6)$$

Rörelsekvationen för endimensionell rörströmning kan skrivas som.

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 \quad (3-7)$$

Ekvation 3-6 och 3-7 är förenklade ekvationer och en utförlig härledning finns i bilaga 3 och 4.

⁴ Fluid transients in systems sidan 96

⁵ Fluid transients in pipeline systems sidan 144

⁶ Fluid transients in pipeline systems sidan 143

När karakteristikmetoden utnyttjas på rörelseekvationen och kontinuitetsekvationen erhålls följande ekvationssystem.⁷

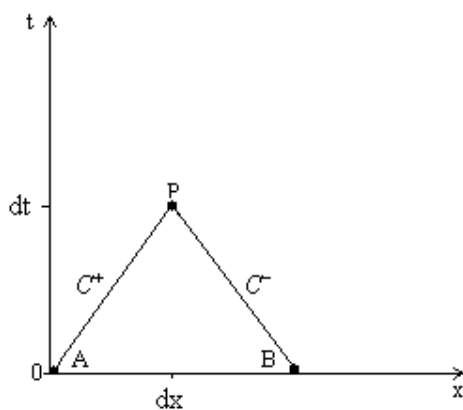
$$C^+ : \begin{cases} \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 & (3-8) \\ \frac{dx}{dt} = +a & (3-9) \end{cases}$$

$$C^- : \begin{cases} -\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 & (3-10) \\ \frac{dx}{dt} = -a & (3-11) \end{cases}$$

Dessa ekvationer härleds utförligt i bilaga 5.

Ekv 3-8 är bara giltig när ekv 3-9 är uppfylld och ekv 3-10 är bara giltig när ekv 3-11 är uppfylld.

Detta kan visualiseras på x-t planet enligt figur 3-2.



Figur 3-2. Karakteristiska linjer i x-t planet.

Lutningen på C^+ respektive C^- linjen representerar våghastigheten. Ekvation 3-8 och 3-10 gäller bara längs dessa linjer. Punkten P befinner sig en sträcka dx från punkt A och B, samt tiden dt framåt i tiden.

Ekvation 3-8 och 3-10 kan integreras till finita differensekvationer som kan lösas numeriskt. Detta beskrivs i kapitel nästa kapitel.

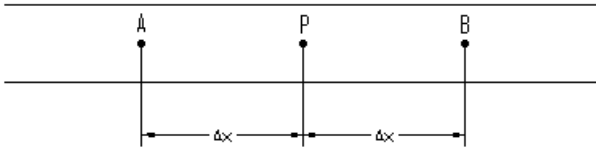
⁷ Fluid transients in systems sidan 39

3.4 Finita differensekvationer för numerisk lösning

I röret i figur 3-3 är punkterna A, P och B markerade. En tryckvåg med hastigheten a som passerar punkt A vid tiden $t=0$ kommer att nå punkt P, som befinner sig en sträcka Δx bort, vid tiden $\frac{\Delta x}{a} = \Delta t$. Vid samma tidpunkt kommer en våg som befann sig vid punkten B vid

tiden $t=0$ att ha nått punkten P. Tillståndet vid punkten P beror alltså på tillståndet vid punkterna A och B vid tiden $t-\Delta t$.

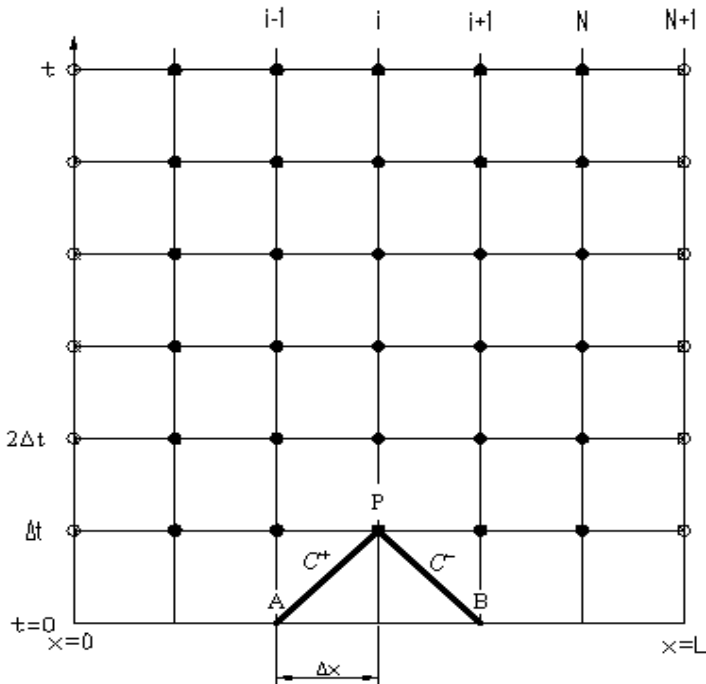
Om tryck och flöde vid A och B är kända kan flödet Q och trycket H beräknas vid punkten P.



Figur 3-3. Rör med punkterna A, B och P markerade

Om röret delas upp i N stycken sektioner så blir det $N+1$ antal punkter på x -axeln.

Ett rutnät konstrueras på $x-t$ planet enligt figur 3-4, med punkt A, B och P markerade.



Figur 3-4. Rutnät i $x-t$ planet med punkterna A, B och P markerade.

Om ekvation 3-8 och 3-10 skrivs om och integreras mellan punkt A och P respektive punkt B och P erhålls⁸

$$C^+ : H_p = H_A - B(Q_p - Q_A) - R|Q_A| \quad (3-12)$$

$$C^- : H_p = H_B + B(Q_p - Q_B) + R|Q_B| \quad (3-13)$$

Där:

$$B = \frac{a}{gA}$$

Och

$$R = \frac{f \Delta x}{2gdA^2}$$

Ekv 3-12 och ekv 3-13 kan skrivas på en mera generell form enligt:

$$C^+ : H(x,t) = C_p - B_p Q(x,t) \quad (3-14)$$

$$C^- : H(x,t) = C_m + B_m Q(x,t) \quad (3-15)$$

Där:

$$C_p = H(t - \Delta t, x - \Delta x) + BQ(t - \Delta t, x - \Delta x)$$

$$B_p = B + R|Q(t - \Delta t, x - \Delta x)|$$

$$C_m = H(t - \Delta t, x + \Delta x) - BQ(t - \Delta t, x + \Delta x)$$

$$B_m = B + R|Q(t - \Delta t, x + \Delta x)|$$

Om ekv 3-14 och ekv 3-15 kombineras så kan H(x,t) beräknas enligt:

$$H(x,t) = \frac{C_p B_m + C_m B_p}{B_p + B_m} \quad (3-16)$$

Q(x,t) kan sedan beräknas från ekv 3-14 eller 3-15.

Lösningen börjar med att begynnelsevärdena vid tiden t=0, d.v.s. Q(x,0) och H(x,0) beräknas för alla punkter längs x-axeln. Sedan stegar man i tiden till t=Δt och beräknar Q(x, Δt) och H(x, Δt) vid alla punkter tills det önskade tidsintervallet är täckt.

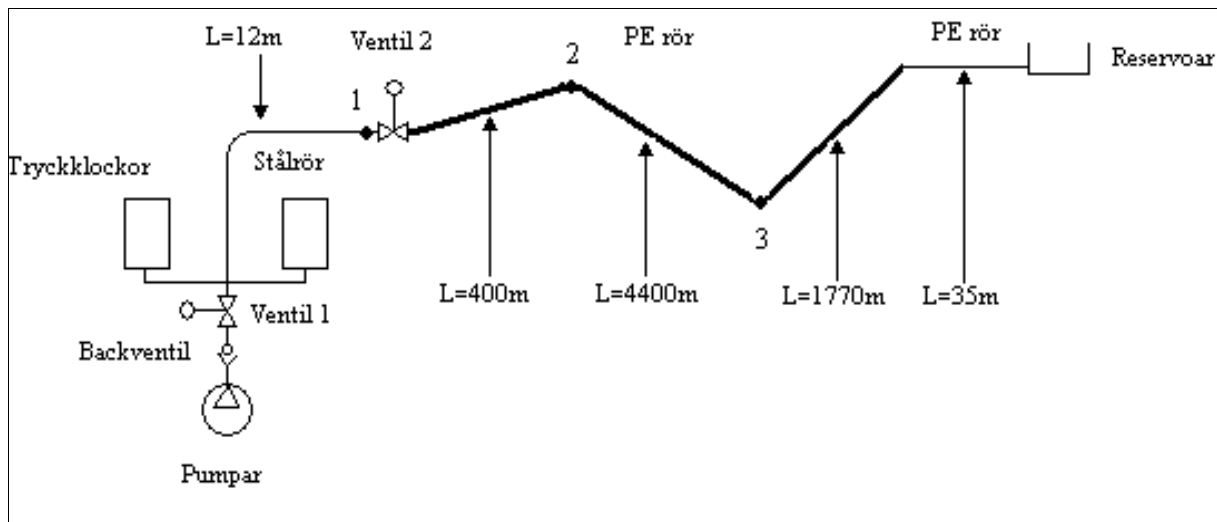
I ändarna av röret vid x = 0 och x = L gäller bara en av ekv 3-14 och 3-15. Det gör att problemet inte kan lösas om inte kompletterande ekvationer som bestämmer randvillkoren Q(0,t), H(0,t) och Q(L,t), H(L,t) är tillgängliga. Det kan vara ekvationer som direkt bestämmer Q eller H eller en relation mellan dom.

⁸ Fluid transients in systems sidan 40

4. Beräkningsfall

Det fall som skall analyseras är en ca 6000 m lång råvattenledning från sjön Hällungen till en reservoar i Stenungsund.

En principiell skiss över rörsystemet visas i figur 4-1, med numrerade noder, där trycken sedan skall beräknas.



Figur 4-1. Skiss över fallet som skall studeras med numrerade punkter där trycken skall beräknas.

I pumphuset sitter tre seriekopplade pumpar. Efter pumparna sitter det en backventil och en reglerventil. Direkt efter reglerventilen sitter det två tryckklockor. Dessa tryckklockor är behållare med vatten med en luftkudde ovanpå. Denna luftkudde kan sedan expandera eller komprimeras för att jämna ut tryckstötarna under flödesförändringar.

Huvudledningen är tillverkat av polyeten, PE, som är ett termoplastmaterial med ett brett användningsområde.

Rören i pumphuset är av stål med dimension DN 400. Den sista sträckan innan reservoaren är av PE med dimension DN 500.

De ventiler som finns är av typen vridspjällsventiler.

Tre olika flödesalternativ med två olika dimensioner på huvudledningen i PE material kommer att studeras. Dessa är.

Alternativ 1. $Q = 338$ l/s. Rördimension DN 600

Alternativ 2. $Q = 450$ l/s. Rördimension DN 700

Alternativ 3. $Q = 800$ l/s. Rördimension DN 700

Rören i pumphuset samt det sista röret kommer att vara samma i samtliga fall.

De pumpar som finns är gamla och pumpdata saknas.

Tryckklockorna har diametern 2 m och höjden 3,5 m. Inloppsroren till tryckklockorna är 300 mm i diameter. Vattennivån i tryckklockorna under drift är inte känd.

Referensnivån är vid pumphuset, dvs. $z = 0$ m. Den sista reservoaren ligger på $z = 15$ m. De övriga höjdnivåerna för respektive nod enligt figur 4-1 är

Punkt 1: 0 m

Punkt 2: 10 m

Punkt 3: -30 m

Följande data för rören används:

Tabell 4-1. Dimensioner och egenskaper för rören i beräkningsfallet

Rör	Innerdiameter	Ytterdiameter	E-Modul	Ytråhet
PE100-DN 500	0,443 m	0,5 m	$0,8^9$ GN/m ²	$0,007^{10}$ mm
PE100-DN 600	0,558 m	0,63 m	0,8 GN/m ²	0,007 mm
PE100-DN 700	0,629 m	0,71 m	0,8 GN/m ²	0,007 mm
Stål-DN 400	0,4 m	0,4071	210 GN/m ²	0,3 mm

Det som skall analyseras är vilka tryck som uppstår i noderna 1, 2 och 3 då ventil 2 stänger på olika tider. De tider som har valts är 120, 240 och 360 sekunder.

⁹ Formler och tabeller för mekanisk konstruktion sidan 60

¹⁰ GPA produktkatalog nr 8 sidan PP-5

5. Simulering och tillämpning av förenklade metoder

De beräkningsmetoder som beskrivs i kapitel tre tillämpas på det fall som beskrivs i kapitel 4. Simuleringar görs dels i Flowmaster2, som är en kommersiell programvara, samt i Matlab, där ett eget program utvecklas. Båda dessa program baseras på karakteristikmetoden.

5.1 Stelkroppsmetoden

För att beräkna trycken enligt stelkroppsteorin görs en passningsräkning där en tryckskillnad stoppas in i ekv 3-5 och en tid beräknas tills rätt tid fås. Observera att absolutbeloppet av tryckskillnaden måste användas.

De tryck som stelkroppsteorin ger är bara den första trycksänkningen eller tryckhöjningen som sker när ventilen stängs.

För nod 1 används hela stålrorets längd och tryckskillnaden är skillnaden i trycknivå mellan reservoaren och trycket i noden. För nod 2 och 3 används rörlängden från respektive nod till reservoaren och tryckskillnaden är skillnaden i trycknivå mellan reservoaren (25m) och noden.

5.2 Juokowskis ekvation

När trycket beräknas i nod 1 används våghastigheten i stålroret och när trycket beräknas i nod 2 och 3 används våghastigheten i PE röret. Våghastigheten i rören blir med ekvation 3-3:

Stålrör: 1152 m/s

PE-DN630: 223 m/s

PE-DN710: 223 m/s

De högsta respektive lägsta trycken för de olika alternativen fås genom att addera de stationära trycken med tryckförändringen enligt Juokowskis ekvation.

5.3 Simulering i Flowmaster2

Flowmaster2 är ett program som används för att simulera intern strömning och värmeöverföring. Med hjälp av programmet kan tryck, temperaturer och flöden mm bestämmas. De simuleringar som görs kan antingen vara under stationära förhållanden eller tidsberoende sk transienta förlopp.

Programmet har ett stort förråd av färdiga komponenter som ventiler, rör och pumpar mm. Till dessa komponenter finns det färdiga kurvor eller ekvationer som beskriver exempelvis förlusten över en ventil vid olika ventilinställningar. Det finns även så kallade controllers, som är komponenter som kan användas för att styra andra komponenter.

I programmet bygger man upp ett nätverk av komponenter, som sedan bindsr samman i knutpunkter, s.k. noder. Varje komponent tilldelas sedan egenskaper som dimensioner och annan data. I programmet finns även fördefinierade vätskor som kan användas. Det går även att definiera egna vätskor eller vätskeblandningar. Resultaten kan visas i grafer eller i listor för varje enskild nod eller komponent.

Programmet tar även hänsyn till kavitation. Denna möjlighet går att stänga av och på i varje nod för sig. Även förångningstrycket går att ställa in.

I programmet måste våghastigheten skrivas in manuellt för varje rör. Våghastigheten bestäms med ekv 3-3. För att programmet skall kunna räkna med elasticiteten i rörmaterial och vätska måste det så kallade s-kriteriet vara uppfyllt. Med det menas att kvoten $S = L/a \times \Delta t$ måste vara ett heltal. Om inte detta kriterium är uppfyllt beräknar programmet den aktuella rördelen som rigid, d.v.s. stelkroppsteorin används. Rörets längd eller våghastighet kan ibland behöva justeras för att kriteriet skall uppfyllas.

Då det inte finns några data för pumparna används istället en reservoar med konstant vattennivå för simuleringarna. Den vattennivå som används för de olika alternativen enligt kap 4 är.

Alternativ 1: 45 m
Alternativ 2: 45 m
Alternativ 3: 70 m

Ventil 1 justeras för varje alternativ tills rätt flöde fås. Vattennivån i tryckklockorna är inte känd. Därför antas en vattennivå på 2 meter ovanför referensnivån för samtliga fall.

5.4 Simulering i Matlab

En förenklad version av fallet som beskrivs i kap 3 modelleras i Matlab. Tryckklockorna beaktas inte. Böjar och in och utloppsförluster tas inte heller med. Istället justeras den första ventilen så att rätt flöde uppnås.

Då våghastigheten i stålrören i pumphuset är stor i förhållande till PE-röret så kommer vågen att hinna förflytta sig en mycket längre sträcka i stålröret än i PE-röret under ett tidssteg. Detta gör att varje steg i x-led i stålrören måste vara mycket större än i PE-röret.

Då stålröret är så kort är detta inte möjligt, utan denna rördel modelleras stelkroppsteorin. Även den sista sträckan i PE har modellerats med stelkroppsteorin.

Om ekv 3-4 integreras över ett tidssteg Δt erhålls¹¹

$$H_{1(i-1)} - H_{2(i-1)} = C_1 - C_2 Q_{i-1} \quad (5-1)$$

Där

$$C_1 = H_{2(i-1)} - H_{1(i-1)} - \frac{2LQ_{i-1}}{gA\Delta t}$$

$$C_2 = \frac{l}{gA} \left(\frac{f}{DA} |Q_{i-1}| + \frac{2}{\Delta t} \right) Q_i$$

Och

H_1 = trycknivån i rörets inlopp

H_2 = trycknivån i rörets utlopp

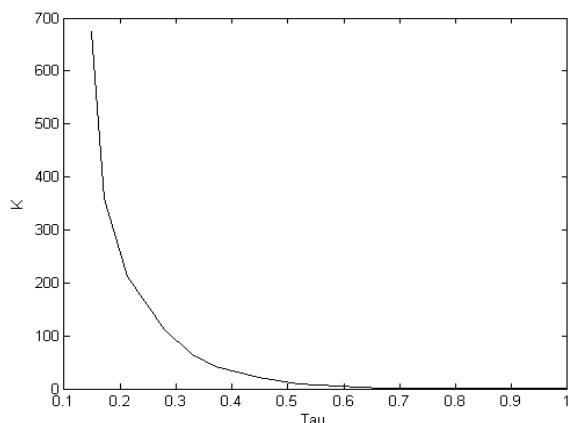
¹¹ Fluid transients in systems sidan 124

Tryckfallet över en ventil kan bestämmas genom följande relation¹²

$$\Delta H = \frac{KV^2}{2g} = \frac{KQ^2}{A^2 2g} \quad (5-2)$$

Där ΔH = tryckfallet över ventilen och K är en förlustkoefficient.

En kurva för förlustkoefficienten K enligt figur 5-1 har hämtats från Flowmaster2 för att få samma stängningskaraktäristik i de båda programmen.



Figur 5-1. Förlustkoefficienten k i förhållande till ventilens öppning τ .

Figuren visar förhållandet mellan ventilens förlustkoefficient K och ventilens öppning τ , där τ beskriver förhållandet mellan fullt öppen och helt stängd ventil.

τ antas variera linjärt under ventilens stängningstid.

Tryckfallet över backventilen beskrivs på samma sätt som ekv 5-2

När flödet blir negativt stänger ventilen direkt, utan någon fördröjning eller läckage.

Ekv 5-1 löses numeriskt i Matlab tillsammans med ekv 3-14 och 3-15 samt ekv 5-2.

Begynnelsevärdena vid tiden $t=0$ löses med Bernoullis ekvation.

Flödena Q och trycken H lagras i matriser för varje rör.

Bulkmodulen för vattnet har satts till $2,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.¹³

Programmet finns i bilaga 6.

¹² Fluid transients in systems sidan 45

¹³ Introduction to fluid mechanics sidan 16

6. Resultat

Här presenteras de resultat som erhöles från de olika metoderna. De noder som trycken har beräknats i är punkt 1, 2 och 3 enligt figur 3-1.

Det som simuleras är trycken för olika flöden och stängningstider för ventil 2.

De fall som simuleras är enligt tidigare.

Alternativ 1. $Q = 338$ l/s. Huvudledningens dimension = DN 600

Alternativ 2. $Q = 450$ l/s. Huvudledningens dimension = DN 700

Alternativ 3. $Q = 800$ l/s. Huvudledningens dimension = DN 700

För varje alternativ enligt ovanstående görs en beräkning med olika stängningstider för ventil 2. De stängningstider som simuleras är 120, 240 och 360 s

De lokala statistiska trycken i respektive nod enligt figur 6 för stationärt flöde framgår av tabellen nedan. Dessa tryck är beräknade med Flowmaster2.

Tabell 6-1. Tryck i noderna under stationära förhållanden för de olika fallen enligt Flowmaster2.

Alternativ	Nod 1 (Bar)	Nod 2 (Bar)	Nod 3 (Bar)
1	3,9	2,8	5,8
2	3,9	2,8	5,8
3	6,6	5,3	6,6

I följande kapitel redovisas resultaten från de olika metoderna för samtliga alternativ. Alla tryck är absoluttryck i bar.

I nod 1 redovisas bara den första tryckökningen.

I nod två och tre ger stelkroppsteorin bara den första trycksänkningen och inte den efterföljande tryckökning som sker då tryckvågen återvänder.

6.1 Alternativ 1

De lokala statistiska trycken från de olika metoderna för alternativ 1 redovisas i tabellerna nedan.

Tabell 6-2. De lägsta statistiska trycken i noderna för alternativ 1.

Nod	Flowmaster2			Matlab			Stelkropp			Juokowski
	120s	240s	360s	120s	240s	360s	120s	240s	360s	
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,02	0,02	0,32	-0,8	0,01	0,4	0,92	1,2	1,23	-0,3
3	3,95	4,6	4,83	3,9	4,6	4,8	5,16	5,3	5,34	2,7

Tabell 6-3. De högsta statistiska trycken i noderna för alternativ 1

Nod	Flowmaster2			Matlab			Stelkropp			Juokowski
	120s	240s	360s	120s	240s	360s	120s	240s	360s	
1	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,415	5,415	5,41	43,9
2	4,3	2,7	2,5	3,2	2,6	2,3	-	-	-	5,9
3	7,44	6,1	5,9	6,6	6,2	5,8	-	-	-	8,9

6.2 Alternativ 2

I tabellerna nedan redovisas resultaten för alternativ 2.

Tabell 6-4. De lägsta statistiska trycken för alternativ 2.

Nod	Flowmaster2			Matlab			Stelkropp			Juokowski
	120s	240s	360s	120s	240s	360s	120s	240s	360s	-
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,02	0,15	0,55	-0,7	0,3	0,7	1,02	1,24	1,32	-045
3	4	4,7	4,9	4,1	4,7	4,9	5,24	5,32	5,34	2,55

Tabell 6-5. De högsta statistiska trycken för alternativ 2.

Nod	Flowmaster2			Matlab			Stelkropp			Juokowski
	120s	240s	360s	120s	240s	360s	120s	240s	360s	-
1	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,416	5,416	5,415	45,2
2	4,3	2,6	2,3	3,2	2,4	2,2	-	-	-	6,05
3	7,5	6	5,8	6,4	6	5,7	-	-	-	9,05

6.3 Alternativ 3

I tabellerna nedan redovisas resultaten för alternativ 3.

Tabell 6-6. De lägsta statistiska trycken för alternativ 3.

Nod	Flowmaster2			Matlab			Stelkropp			Juokowski
	120s	240s	360s	120s	240s	360s	120s	240s	360s	-
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,02	0,02	0,24	-1,8	-0,4	0,4	0,89	1,18	1,28	-0,47
3	3,7	4,3	4,76	3,7	4,3	4,9	5,21	5,3	5,33	0,83

Tabell 6-7. De högsta statistiska trycken för alternativ 3.

Nod	Flowmaster2			Matlab			Stelkropp			Juokowski
	120s	240s	360s	120s	240s	360s	120s	240s	360s	-
1	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,85	7,85	7,85	79,6
2	4,2	3,4	2,5	3,8	2,8	2,3	-	-	-	11,07
3	7,8	6,3	5,9	6,8	6,3	5,9	-	-	-	12,37

7. Slutsats/Diskussion

De resultat som har framkommit är inte verifierade mot verkliga värden utan de olika metoderna har bara jämförts internt.

Kvantifieringen av de olika beräkningsmetoderna gäller bara för det aktuella fallet. Vid andra fall kan skillnaderna bli större eller mindre.

I de fall som kavitation uppstår är inte resultaten från de olika metoderna jämförbara, då de förenklade metoderna inte tar hänsyn till detta. Matlabprogrammet tar inte heller hänsyn till detta. När trycket sjunker under ångbildningstrycket är Matlabmodellen inte giltig.

Simuleringarna visar att resultaten från de förenklade metoderna skiljer sig markant från simuleringarna i vissa fall. Speciellt tydligt är detta i nod 1, där Juokowskis ekvation ger mycket högre tryck än simuleringarna gör. Det beror på att stålröret i pumphuset har en periodtid på ca 0.02 s, vilket gör att ventilens stängningstid är mycket större än rörets periodtid. Det gör att Juokowskis ekvation inte kan användas för att beräkna trycken i detta rör. Att använda Juokowskis ekvation i detta fall ger ett stort fel. Den visar vilket tryck som hade uppstått om ventilen hade stängt på stålrörets periodtid. Stelkroppsteorin går dock att använda, då 120 s uppfyller kriteriet 20 ggr rörets periodtid. Resultaten från stelkroppsbereäkningarna stämmer bra överens med simuleringarna i nod 1. I detta fall är det dock väldigt små tryck som behövs för att bromsa flödet och trycket i nod 1 blir bara lite högre än reservoarens tryck. Även om ventilen skulle stänga på mycket längre tid än 360 s så skulle trycket i nod 1 bli samma som reservoarens tryck. I andra fall kan denna metod troligtvis ge större fel. Det beror på att ekv 3-5 förutsätter att tryckskillnaden är konstant under hela förloppet. I verkligheten kommer dock trycket att variera, pga. ventilens stängningskaraktäristika som gör att ventiler stänger långsamt i början och fort på slutet. Den största flödesminskningen sker på slutet av stängningsförloppet. Det tryck som erhålls av stelkroppsteorin är det tryck som hade uppstått om tryckskillnaden var konstant. Om ventilen stängs med 2 stegs metoden, då ventilens axel vrids fortare under första delen av tiden och långsammare under den sista delen är metoden mer tillförlitlig.

Vad gäller det långa röret i PE är periodtiden ca 50 s. Detta gör att ventilstängningstiden inte får vara mer än 50 s om Juokowskis ekvation skall ge ett bra resultat. För att stelkroppsteorin skall ge ett bra resultat måste tiden vara mer än ca 16 minuter. Ingen av de förenklade metoderna ger därför något tillförlitligt resultat. Resultaten från Juokowskis ekvation ger för stora tryckförändringar och resultaten från stelkroppsteorin ger för låga tryckförändringar.

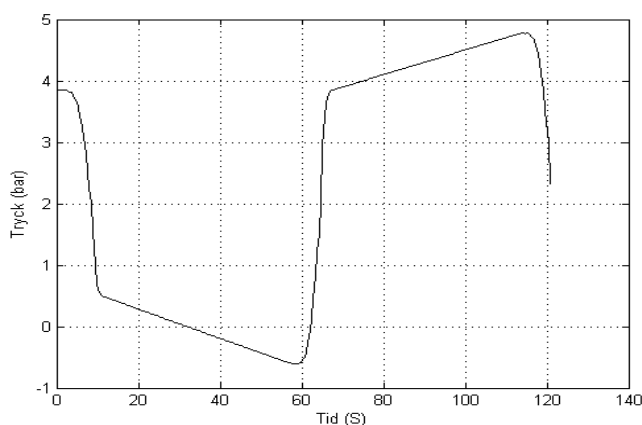
Vidare ger trycken från Juokowskis ekvation de tryck som uppstår alldeles vid ventilen. Vid nod två och tre, som ligger en bit bort från ventilen, har tryckvågen dämpats vilket gör att denna metod inte är lämplig för noder långt bort från ventilen i rör med stora förluster. Detta kan ses i graferna från simuleringarna, där tryckskillnaderna är större i nod två än i nod tre. Vidare så ger denna metod bara den första trycksänkningen som sker. Den efterföljande tryckökningen i nod två och tre som sker då vågen återvänder från andra änden av röret blir inte lika stor som Juokowskis ekvation ger. Det beror på att tryckvågen dämpas av förluster då den färdas genom ledningen.

Resultaten från Matlabsimuleringen stämmer bra överens med resultaten från Flowmaster2 i de fall som kavitation inte uppstår.

Slutsatsen är att de förenklade metoderna bara kan användas i speciella fall. När dessa kan användas är alltså kopplat till rörets periodtid och ventilens stängningstid. När det är stålrör med stor våghastighet så blir rörets periodtid ofta väldigt kort. Juokowskis ekvation ger då väldigt höga tryck. Vid långa ventilstängningstider så kan det ge ganska missvisande resultat, som i detta fall där periodtiden bara var 0,02 s. Det ska mycket till för att stänga en ventil så snabbt. När det är långa rör med låga våghastigheter så kan denna metod ge en fingervisning av vilka tryck som kan uppstå. Den kan användas för att få ungefärliga värden på hur stora de maximala trycken kan bli under en extrem situation. I plaströret var ju periodtiden 50 sekunder och det är ju fullt möjligt att stänga en ventil på den tiden. Om noggrannare resultat eftersöks för specifika ventilstängningstider eller punkter krävs dock en simulering.

Juokowskis ekvation gäller bara för ett rör. Om ledningen består av olika rör med olika rörmaterial och dimension gäller inte metoden. I detta fall så är den sista sträckan innan reservoaren av en annan dimension. Denna rördel är dock så kort i förhållande till huvudledningen att detta inte påverkar

De tryck som Juokowskis ekvation ger behöver inte alltid ge de högsta tryck som kan uppstå. Figur 7-1 visar en graf över tryckhistoriken alldeles nedströms ventil 2. Ventilen stänger på 10 s, vilket uppfyller kriterierna för att Juokowskis ekvation skall gälla. Juokowskis ekvation förutsätter en tryckförändring på 3,25 bar. I figuren syns att trycket sjunker hastigt under 10 s, för att sedan fortsätta sjunka under resten av rörets periodtid.



Figur 7-1. Tryck nedströms ventil 2 för alternativ 2. Ventilen stänger på 10 s.

Den första sänkningen av trycket är ca 3,25 bar, vilket motsvarar trycksänkningen enligt Juokowski. Trycket fortsätter sedan att sjunka ca 1 bar. Denna trycksänkning sker utöver Juokowskis trycksänkning och beror på att friktionsförlusterna faller bort. Detta går att härleda om ekv 3-8 och 3-10 analyseras.

Detta är inte något problem vid korta rör med låga friktionsförluster, men kan ge ett stort tillskott i långa ledningar med stora förluster. I vissa fall kan Juokowskis tryck motsvara endast någon procent av den totala tryckökning som uppstår.

Motsvarande gäller även uppströms ventilen, där trycket skulle ha ökat i motsvarande grad.

Den efterföljande tryckökningen efter rörets periodtid hade enligt Juokowskis ekvation gett ett tryck på $4+3.9 = 7.9$ bar. Pga. att vågen dämpas då den fortplantar sig genom ledningen uppstår inte hela detta tryck. Friktionsbortfallet syns dock tydligt även här.

I verkligheten skulle det uppstå kavitation vid 0,02 bar. Detta bortses dock i detta fall.

8. Källförteckning

AGP Produktkatalog nr 8

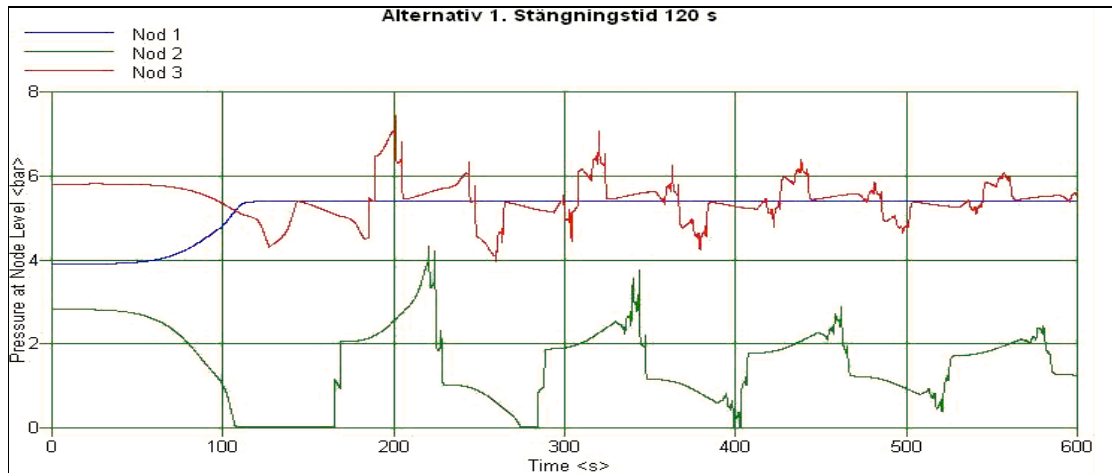
E. Benjamin Wylie, Victor L. Streeter, Fluid transients in systems, ISBN:0-13-322173

A.R.D. Thorley, Fluid transients in pipeline systems, 1991, ISBN 0-9517830-0-9

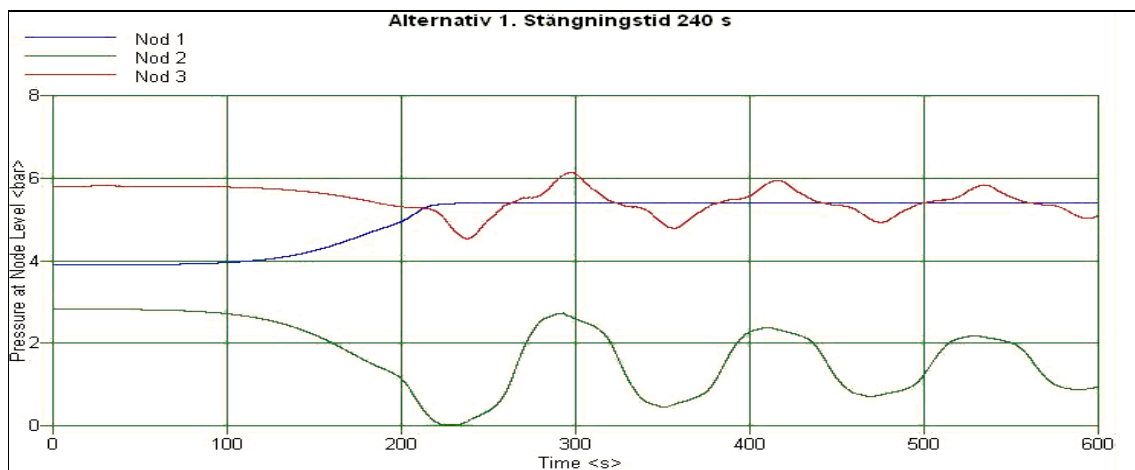
Y. Nakayama, R.F. Boucher, Introduction to fluid mechanics, 1999, ISBN: 0-340-67649-3

K. Björk, Formler och tabeller för mekanisk konstruktion: Mekanik och hållfasthetslära, Femte upplagan, ISBN: 993-042581-0

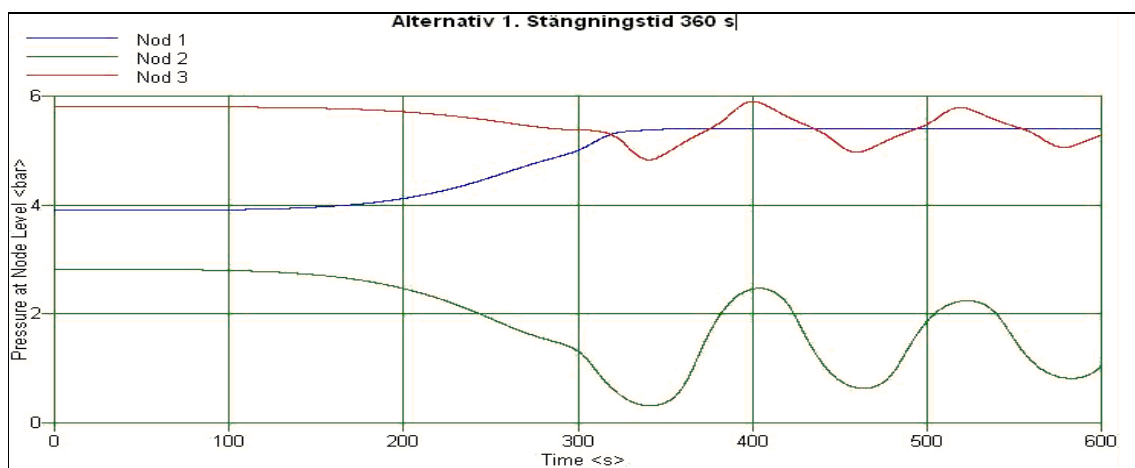
Bilaga 1. Resultat från Flowmaster2



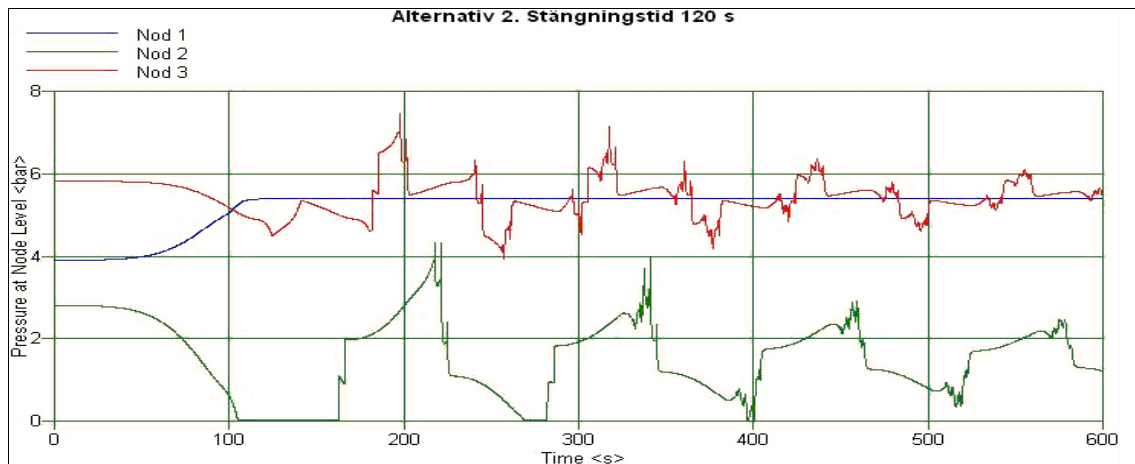
Figur B1-1. Tryck i noderna för alternativ 1. Ventilstängningstid 120 s



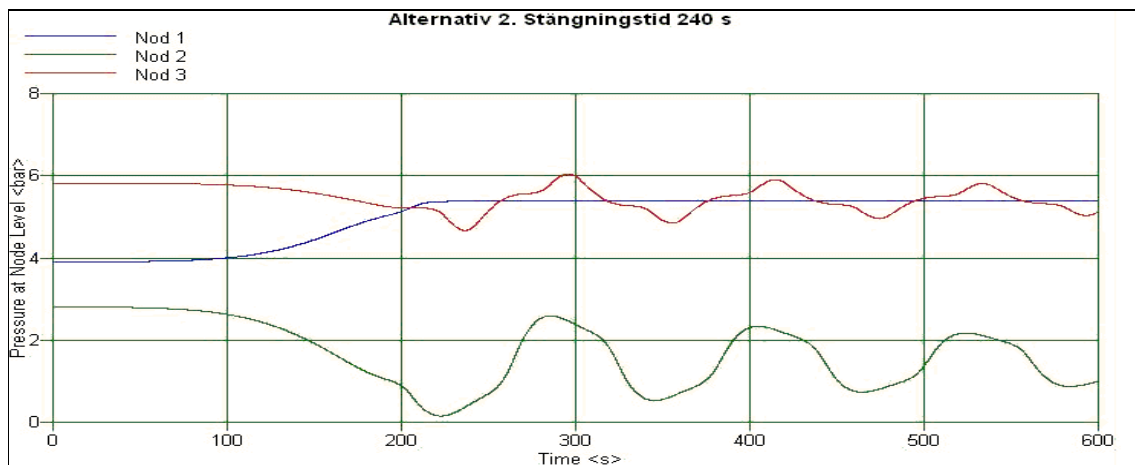
Figur B1-2. Tryck i noderna för alternativ 1. Ventilstängningstid 240 s



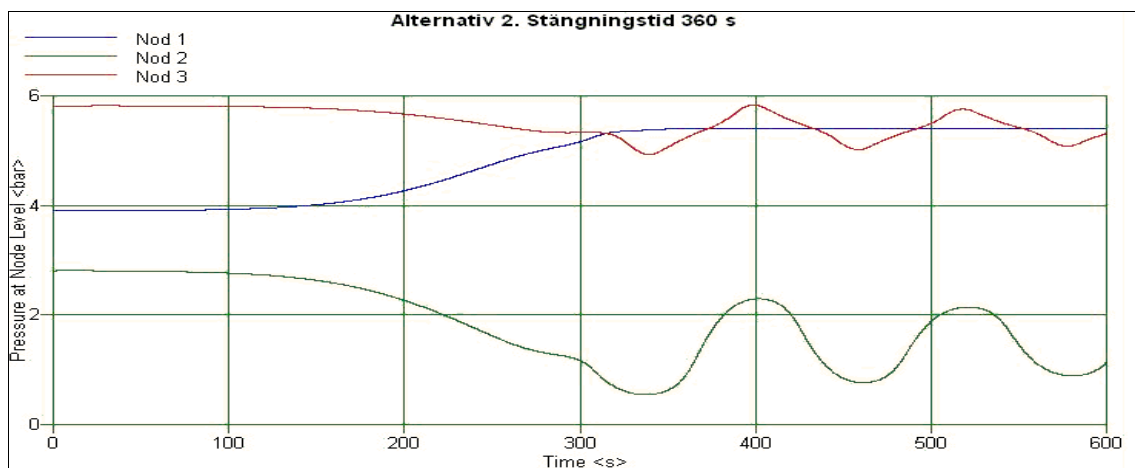
Figur B1-3. Tryck i noderna för alternativ 1. Ventilstängningstid 360 s



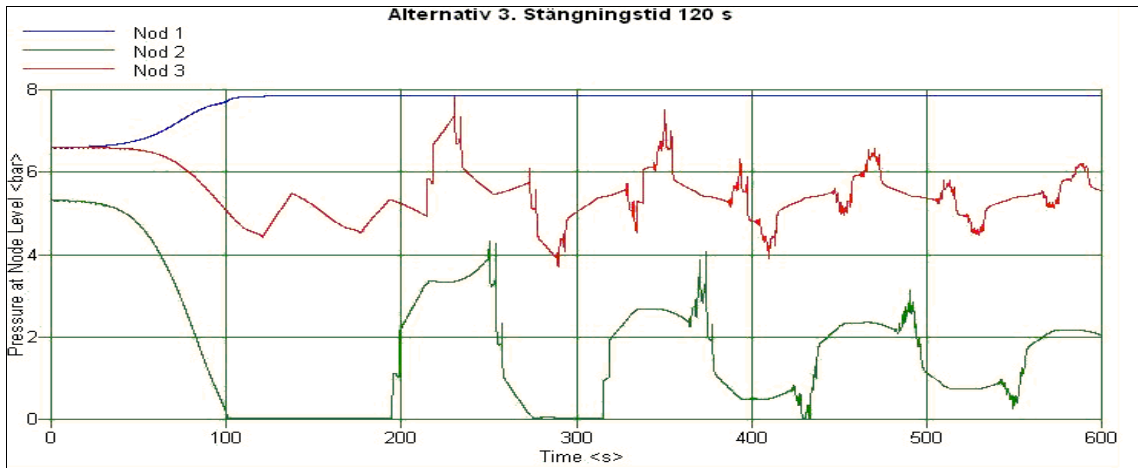
Figur B1-4. Tryck i noderna för alternativ 2. Ventilen stänger på 120 s



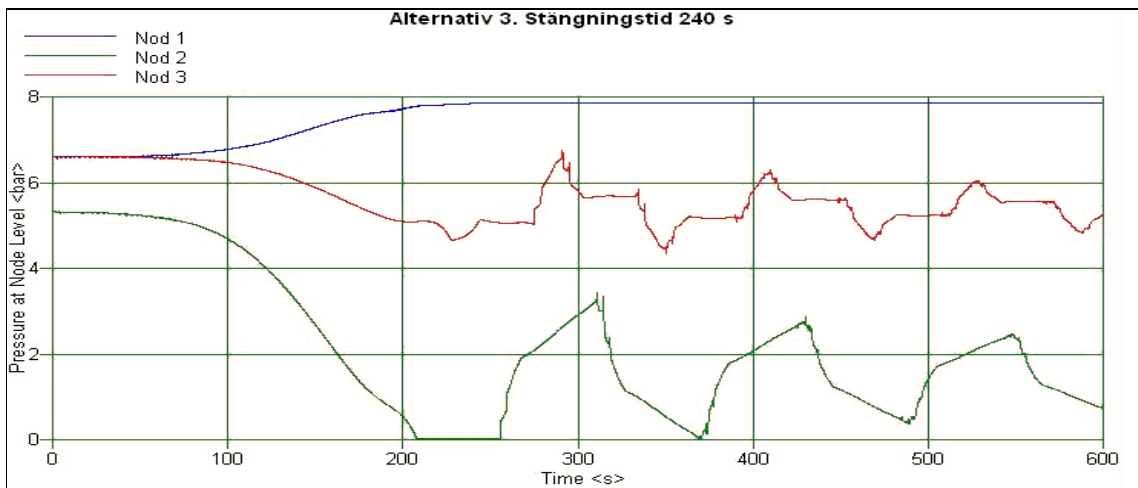
Figur B1-5. Tryck i noderna för alternativ 2. Ventilen stänger på 240 s



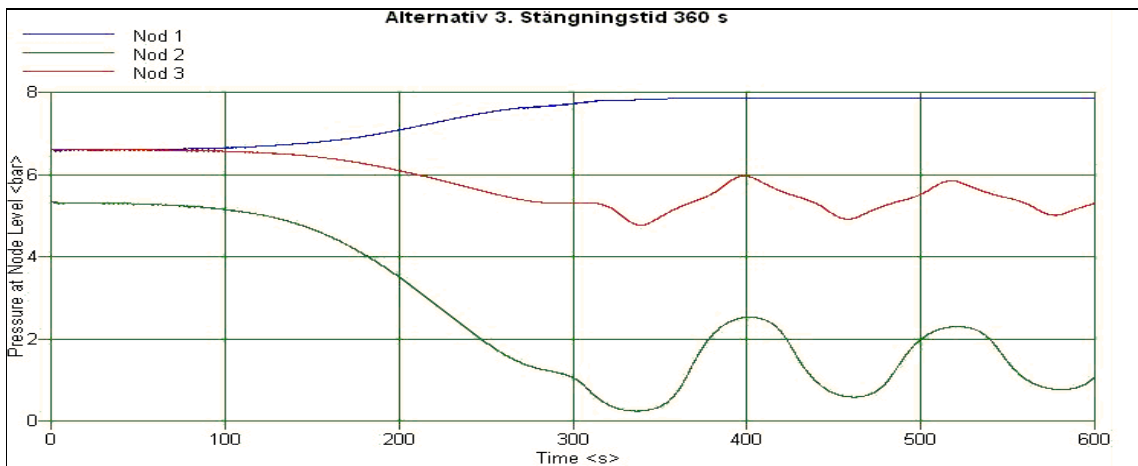
Figur B1-6. Tryck i noderna för alternativ 2. Ventilen stänger på 360 s



Figur B1-7. Tryck i noderna för alternativ 3. Ventilen stänger på 120 s

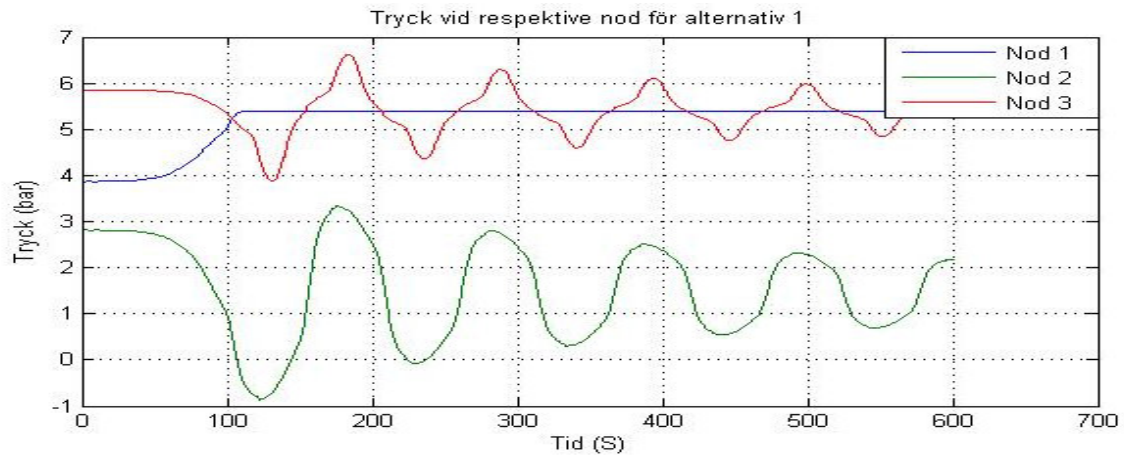


Figur B1-8. Tryck i noderna för alternativ 3. Ventilen stänger på 240 s

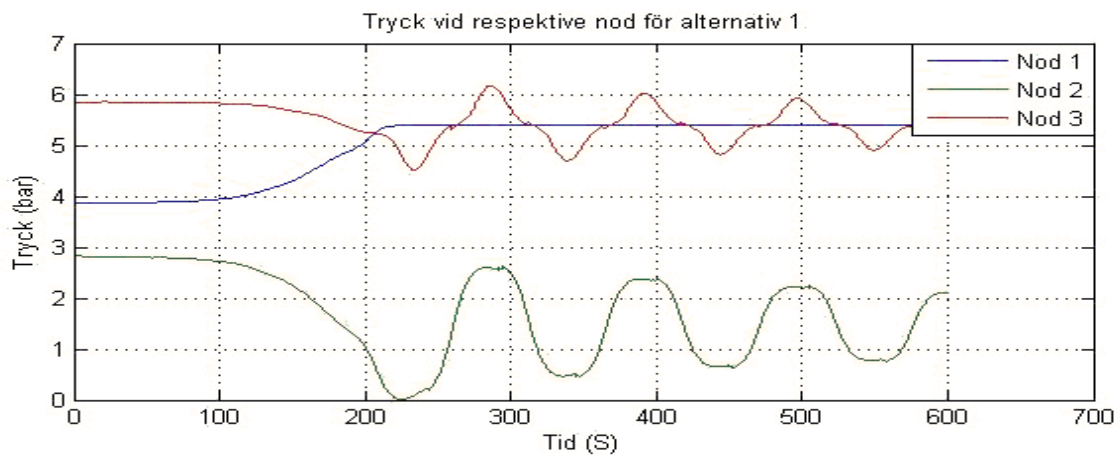


Figur B1-9. Tryck i noderna för alternativ 3. Ventilen stänger på 360 s

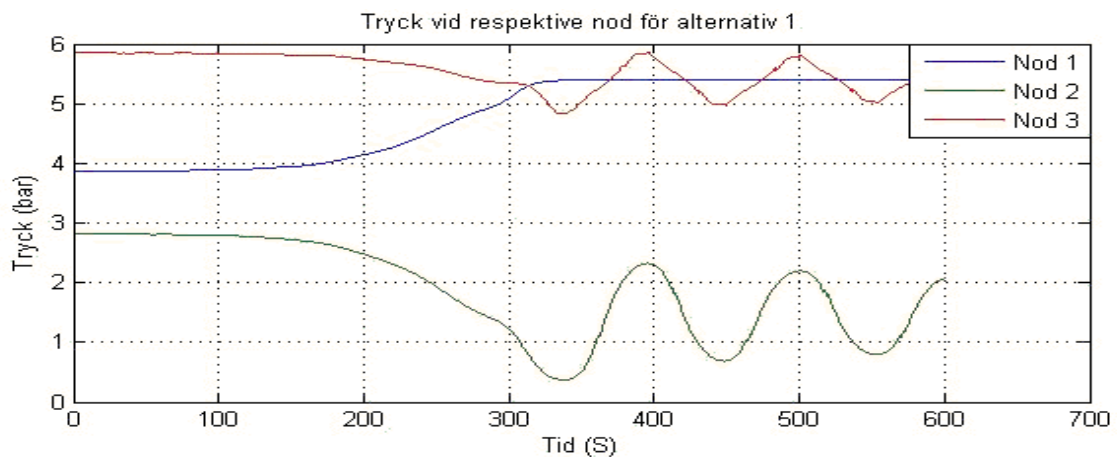
Bilaga 2. Resultat från Matlab



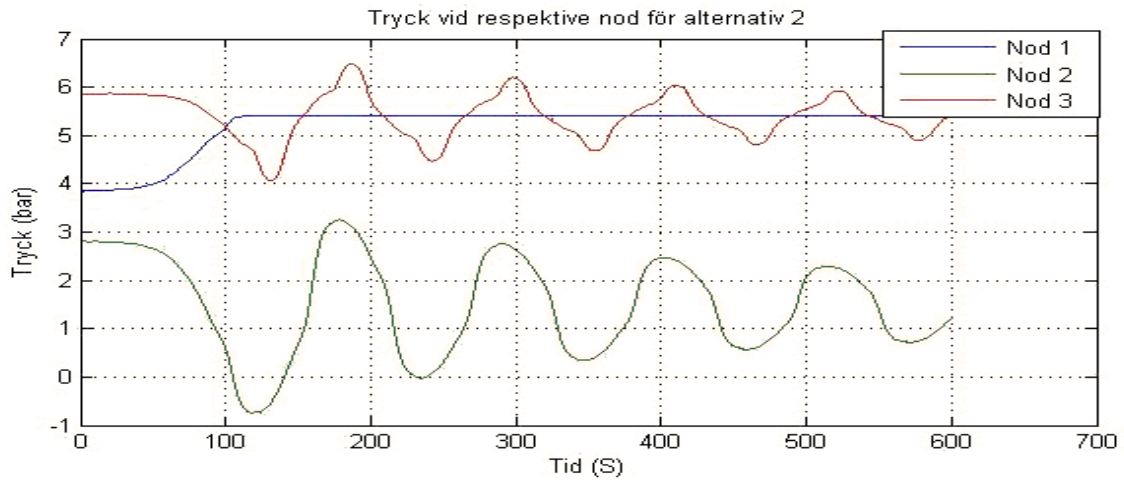
Figur B2-1. Tryck i noderna för alternativ 1. Ventilen stänger på 120 s



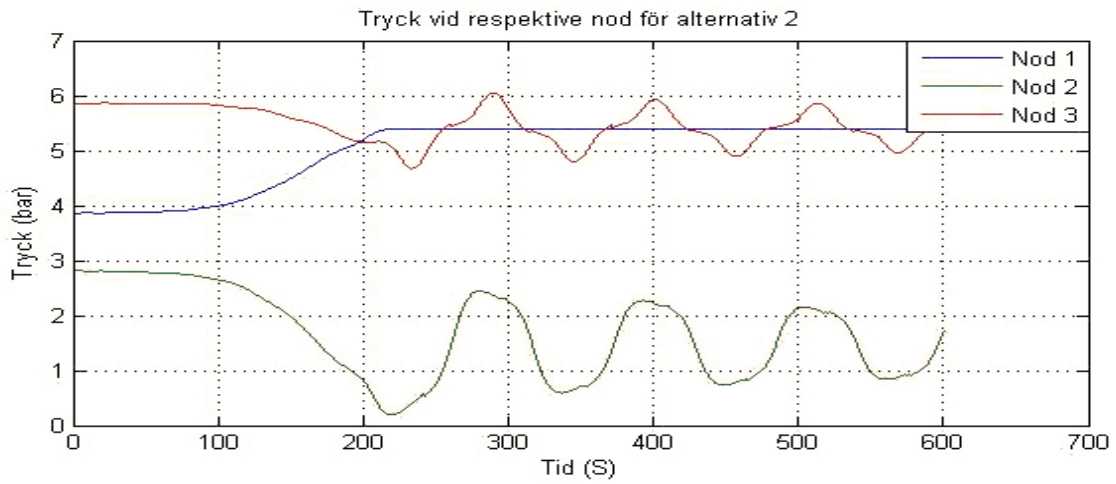
Figur B2-2. Tryck i noderna för alternativ 1. Ventilen stänger på 240 s



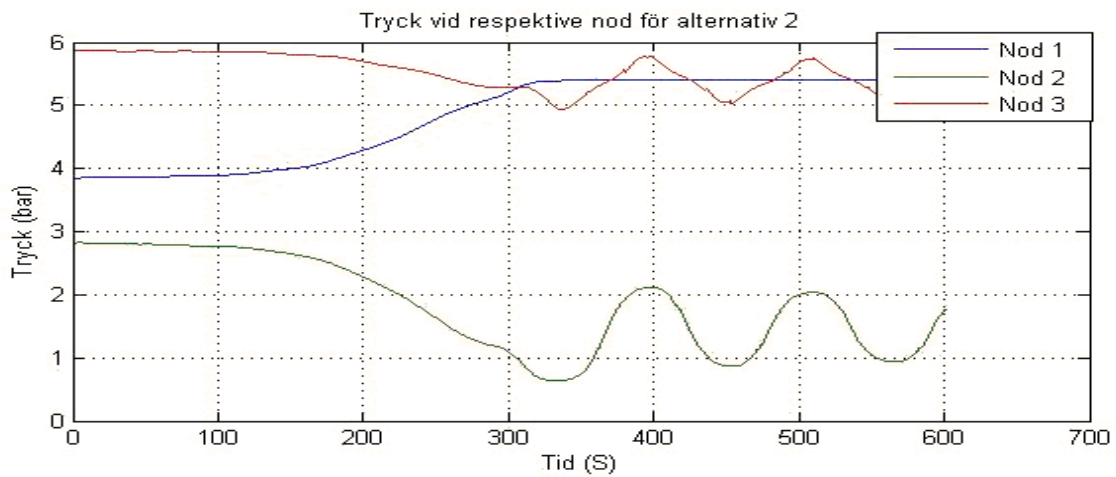
Figur B2-3. Tryck i noderna för alternativ 1. Ventilen stänger på 360 s.



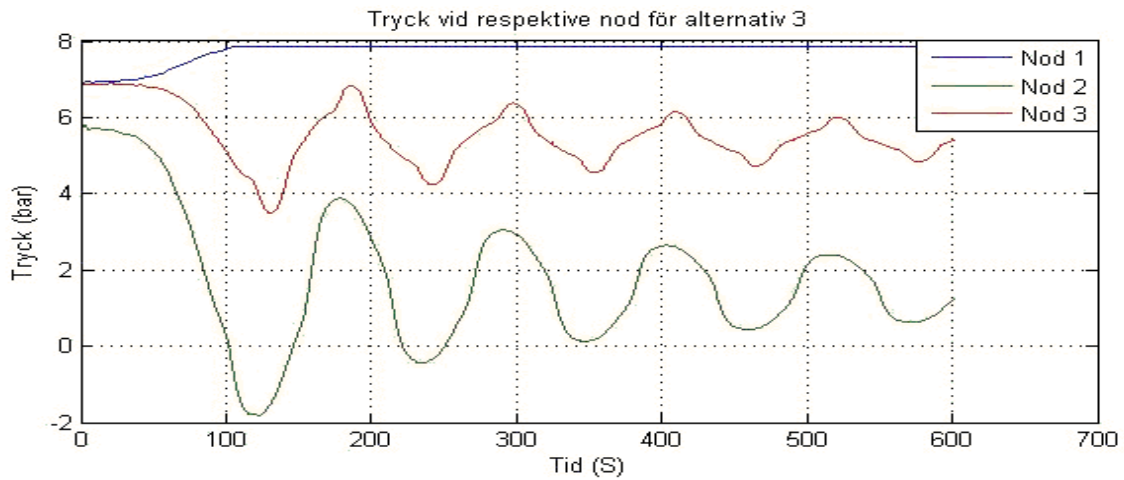
Figur B2-4. Tryck i noderna för alternativ 2. Ventilen stänger på 120 s



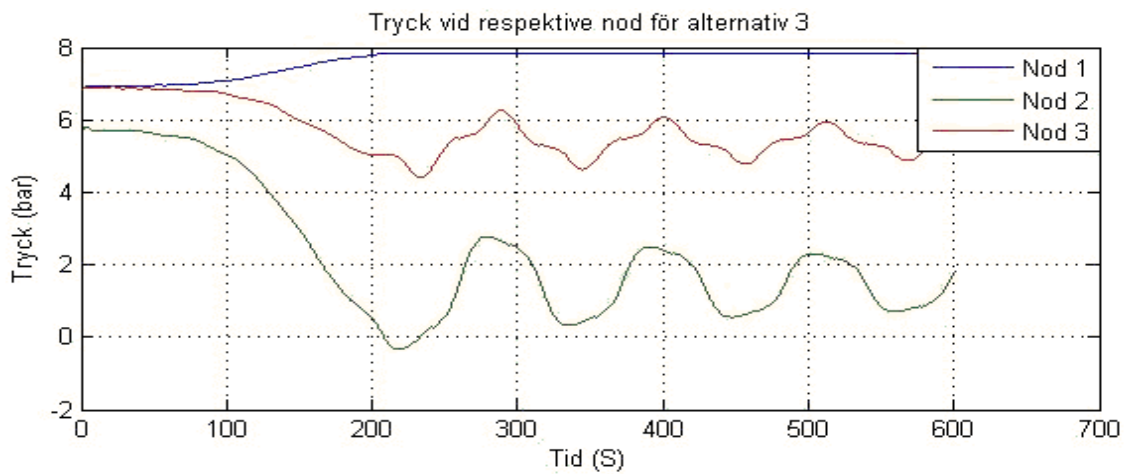
Figur B2-5. Tryck i noderna för alternativ 2. Ventilen stänger på 240 s



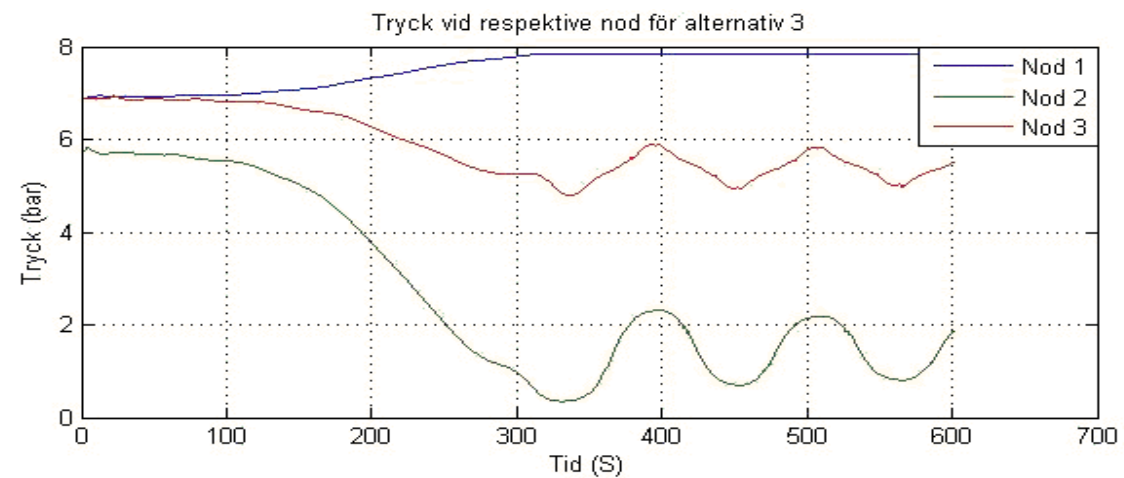
Figur B2-6. Tryck i noderna för alternativ 2. Ventilen stänger på 360 s



Figur B2-7. Tryck i noderna för alternativ 3. Ventilen stänger på 120 s



Figur B2-8. Tryck i noderna för alternativ 3. Ventilen stänger på 240 s

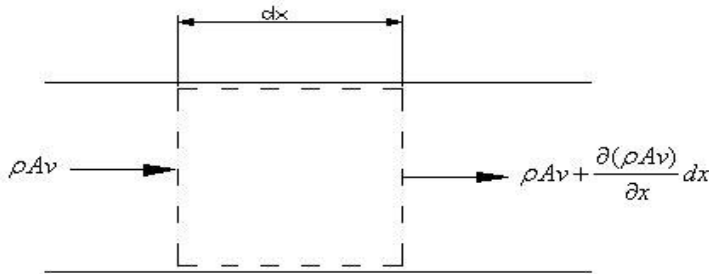


Figur B2-9. Tryck i noderna för alternativ 3. Ventilen stänger på 360 s

Bilaga 3. Härledning av kontinuitetsekvationen.

Här härleds kontinuitetsekvationen för endimensionell rörströmning.

Nettotransport av massa in till kontrollvolymen är lika med ökningen av kontrollvolymens massa. Detta ger med beteckningar enligt figur B3-1.



Figur B3-1. Rör med markerad kontrollvolym med längden dx och tvärsnittsarean A

$$\rho Av - \left(\rho Av + \frac{\partial(\rho Av)}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial(\rho Av)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$$

Efter utveckling av den första termen erhålls:

$$\rho A \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (\text{B3-1})$$

Ekvation (B3-1) kan skrivas om med följande relation:

$$d(\rho A) = \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(\rho A)}{dt} = v \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} \quad (\text{B3-2})$$

Högerledet i ekv (B3-2) är samma som de två sista termerna i ekv 1.

Kombineras ekv (B3-1) och (B3-2) fås, om vänsterledet i ekv (B3-2) utvecklas:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{B3-3})$$

Denna ekvation är en generell kontinuitetsekvation som både tar hänsyn till vätskans kompressibilitet samt rörets elasticitet.

Den första termen tar hänsyn till rörets elasticitet och den andra termen tar hänsyn till vätskans kompressibilitet.

Med hjälp av definitionen av bulkmodulen k ¹⁴

$$k = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

samt följande omskrivning:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dp} \frac{dp}{dt}$$

Kan ekv (B3-3) skrivas om som

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{dp}{dt} \left(1 + \frac{k}{A} \frac{dA}{dp} \right) = 0 \quad (\text{B3-4})$$

Bulkmodulen k tar inte hänsyn till termodynamiska effekter, vilket gör att ekvationen endast gäller för fluider med liten kompressibilitet.

Hastigheten a hos en tryckvåg i ett elastiskt rör kan skrivas som¹⁵

$$a^2 = \frac{k/\rho}{1 + (k/A)(\Delta A/\Delta p)} \quad (\text{B3-5})$$

Ekv (B3-4) och ekv (B3-5) tillsammans gör att kontinuitetsekvationen nu kan skrivas som:

$$\rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dp}{dt} = 0$$

Utvecklas den sista termen i ekv 6 erhålls

$$\rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{B3-6})$$

Transporttermen i ekv (B3-6) kan försummas, då denna är liten i förhållande till övriga termer¹⁶. Då erhålls följande ekvation.

¹⁴ Introduction to fluid mechanics sidan 16

¹⁵ Fluid transients in systems sidan 25

¹⁶ Fluid transients in systems sidan 26

$$\rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{B3-6})$$

Trycktermen i ekv (B3-6) kan bytas ut mot höjd i meter genom följande relation.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t}$$

Vilket ger

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{B3-7})$$

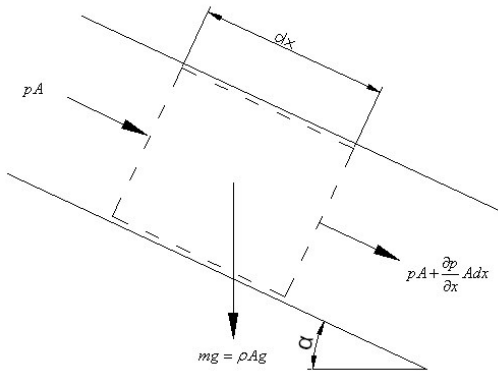
Ekv (B3-7) är en förenklad kontinuitetsekvation som gäller för fluider med låg kompressibilitet och låga hastigheter.

Bilaga 4. Härledning av rörelseekvationen

Rörelseekvationen kommer från Newtons andra lag och säger att rörelsemängdsändringen per tidsenhet är lika med kraften som verkar på en kropp.

$$\frac{dM}{dt} = \sum F \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} = \sum F$$

Om en kraftbalans görs på kontrollvolymen i figur B4-1 med längden dx och tvärsnittets medelarea A erhålls:



Figur B4-1. Rör med strömmande vätska och markerad kontrollvolym.

$$pA - (pA + \frac{\partial p}{\partial x} dx A) - \tau \pi D dx - \rho g A dx \sin \alpha = \rho A dx \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} A + \pi \tau D + \rho g A \sin \alpha + \rho A \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{B4-1})$$

Vid beräkning av tidsberoende s.k. transienta flöden brukar skjuvspänningen τ betraktas som samma som om flödet är stationärt¹⁷.

Vid stationärt flöde är:

$$\Delta p \frac{\pi D^2}{4} = \tau \pi D dx \quad (\text{B4-2})$$

Enligt Darcy-Weisbachs ekvation är:

$$\Delta p = \frac{f \rho dx v^2}{D \cdot 2} \quad (\text{B4-3})$$

Kombineras ekv (B4-2) och ekv (B4-3) erhålls

¹⁷ Fluid transients in systems sidan 21

$$\tau = f \rho \frac{v|v|}{8} \quad (\text{B4-4})$$

Där $v|v|$ används för att skjuvspänningen alltid ska få rätt riktning.

Accelerationen $\frac{dv}{dt}$ kan skrivas som:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{B4-5})$$

Kombineras ekv (B4-1), (B4-4) samt (B4-5) erhålls

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g \sin \alpha + \frac{\lambda v|v|}{2D} \quad (\text{B4-6})$$

Denna ekvation gäller för all fluider, då inga förenklingar har gjorts.

Om rörarean är konstant och fluiden endast är lite kompressibel, som är fallet för vätskor, är termen $v \frac{\partial v}{\partial x} \approx 0$ och kan försummas. Då fås följande ekvation.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g \sin \alpha + \frac{fv|v|}{2D} = 0 \quad (\text{B4-7})$$

Trycktermen i ekv (B4-7) kan skrivas om till trycknivån H m ha följande relation.

$$p = \rho g (H - z), \text{ där } z \text{ är höjden vid rörets centrum ovanför en referensnivå.}$$

Detta kan även skrivas som

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \right) \quad (\text{B4-8})$$

I ekv (B4-8) antas densiteten vara konstant.

Om ekv (B4-7) och ekv (B4-8) kombineras erhålls:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 \quad (\text{B4-9})$$

Ekvation (B4-9) gäller för mindre kompressibla fluider som vätskor, medan ekv (B4-6) gäller för alla fluider.

Bilaga 5. Karaktäristikmetoden

Karaktäristikmetoden är en metod för att lösa partiella differentialekvationer och är vanlig vid analys av trycktransienter i rörsystem.

Rörelseekvationen och kontinuitetsekvationen bildar tillsammans två partiella differentialekvationer. Karaktäristikmetoden omvandlar dessa ekvationer till fyra ordinära differentialekvationer.

Om de förenklade ekvationerna (B3-7) och (B4-9) används

$$L_1 = g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{2D} v|v| = 0$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Dessa två ekvationer kombineras nu genom att använda en okänd multiplikator λ ¹⁸

$$L = L_1 + L_2 = \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{g}{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \lambda \frac{a^2}{g} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{fv|v|}{2D} = 0 \quad (\text{B5-1})$$

Varje två värden på λ kommer att ge två ekvationer som innehåller de två beroende variablerna H och v.

Vidare är:

$$\frac{dH}{dT} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{och} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{B5-2})$$

Med hjälp av ekv (B5-1) och ekv (B5-2) går det nu att visa att om:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda a^2}{g} \quad (\text{B5-3})$$

kommer ekv (B5-1) att övergå till en ordinär differentialekvation och:

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 \quad (\text{B5-4})$$

Enligt ekv B5-3 har λ två lösningar.

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (\text{B5-5})$$

¹⁸ Fluid transients in systems sid 38

Genom att stoppa in dessa värden i ekv (B5-3) fås:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

Detta visar vågens positionsändring i förhållande till tidsändringen.

Om dessa värden på λ stoppas in i ekv B5-3 och ekv B5-4 erhålls följande ekvationssystem:

$$C^+ : \begin{cases} \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 & (5-8) \\ \frac{dx}{dt} = +a & (5-9) \end{cases}$$

$$C^- : \begin{cases} -\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 & (5-10) \\ \frac{dx}{dt} = -a & (5-11) \end{cases}$$

De två partiella differentialekvationerna har nu övergått till fyra ordinära differentialekvationer och kan integreras.

Ekv (5-8) och (5-10) är bara giltiga när ekv (5-9) resp ekv (5-11) är giltiga.

Bilaga 6. Matlab-program

```
clear all
% Simulerar alternativ 2
L1=12; % Första rörets längd
L2=6200; % Andra rörets längd
L3=35; % Tredje rörets längd
D1=0.4; % Första rörets innerdiameter
D2=0.629; % Andra rörets innerdiameter
D3=0.443; % Tredje rörets innerdiameter
b=0.0405; % Plaströrets godstjocklek
f1=0.017; % Första rörets friktionskoefficient
f2=0.013; % Andra rörets friktionskoefficient
f3=0.016; % Tredje rörets friktionskoefficient
g=9.81;
ro=1000; % Vattnets densitet
Deltax=100; % Längden på ett steg i x-led
H0=45+10; % Första reservoarens nivå (höjd + atmosfärstryck)
Hr=15+10; % Andra reservoarens nivå (höjd + atmosfärstryck)
N1=1; % Antal element i första röret
N2=L2/Deltax; % Antal element i andra röret
N3=1; % Antal element i tredje röret
E=0.8*10^9; % Elasticitetsmodul rör två (Pa)
K=2.06*10^9; % Vattnets bulkmodul (Pa)

a=sqrt(K/ro)*sqrt(1/(1+(D2/b)*(K/E))); % Vågastigheten i rör två

T=600; % Simulerad tid
Tv1=120; % Första ventilens stängningstid
Tau1=0.446; % Första ventilens initialtillstånd
Tauf1=0.446; % Första ventilens sluttillstånd
Tv2=360; % Andra ventilens stängningstid
Tau2=1; % Andra ventilens initialtillstånd
Tauf2=0; % Andra ventilens sluttillstånd

Deltat=Deltax/a; % Längd på tidssteg
k1=(T/Deltat)+1; % Antal steg i y-led
k=ceil(k1); % Rundar av till jämna steg
K1=4; % Ventilkonstant ventil 1
K2=0.43; % Ventilkonstant ventil 2
Kb=2.1; % Backventilens konstant
Dv1=0.4; % Första ventilens diameter
Dv2=0.4; % Andra ventilens diameter
Db=0.4; % Backventilens diameter
Av1=pi*Dv1^2/4; % Första ventilens area
Av2=pi*Dv2^2/4; % Andra ventilens area
Ab=pi*Db^2/4; % Backventilens area

A1=pi*D1^2/4; % Första rörets area
A2=pi*D2^2/4; % Andra rörets area
A3=pi*D3^2/4; % Andra rörets area

%%%%%%%%%% Data från Flowmaster2 till ventilernas k-kurva
TauF=[0.149 0.1714 0.213 0.279 0.33 0.37 0.447 0.517 0.59 0.67 0.74 0.708
0.784 0.822 0.86 0.886 0.911 0.946 0.975 1];
KF=[674.6 359.4 211 112 64 42 21 10 5 2.3 1.54 1.1 0.744 0.5 0.345 0.2675
0.207 0.17 0.145 0.129];
P=polyfit(TauF,KF,20);
%%%%%%%%%% Slut. K-värden till ventilerna hämtas sedan från P
```

```

K1=polyval(P,Tau1);
K2=polyval(P,Tau2);
R=(f2*Deltax)/(2*g*D2*A2^2);
Q0=sqrt((H0-
Hr)*2*g/(((K1)/Av1^2)+((K2)/Av2^2)+(Kb/Ab^2)+f1*L1/(D1*A1^2)+f2*L2/(D2*A2^2
)+f3*L3/(D3*A3^2))); %Stationärt flöde
B=a/(g*A2);

H1=zeros(k,N1+1); % Tom matris med alla H
Q1=zeros(k,N1+1); % Tom matris med alla Q

H2=zeros(k,N2+1); % Tom H-matris för andra röret
Q2=zeros(k,N2+1); % Tom Q-matris för andra röret

H3=zeros(k,N3+1); % Tom H-matris för tredje röret
Q3=zeros(k,N3+1); % Tom Q-matris för tredje röret

%%% Beräknar tryck och flöden vid stationärt flöde (t=0)
H1(1,1)=H0-(Q0/Ab)^2*Kb/(2*g)-(Q0/Av1)^2*(K1)/(2*g); % Trycket efter
backventilen och ventil 1 vid stationärt flöde
Q1(1,1)=Q0; % Första elementet Q0 vid t=0 och x=0

for i=2:N1+1 % Fyller den första raden i H1 och Q1
    H1(1,i)=H1(1,i-1)-f1*L1*(Q0/A1)^2/(D1*2*g); % Trycket minskar längs
röret pga av förluster (t=0)
    Q1(1,i)=Q0; % Stationärt flöde vid
t=0
end % Den första raden är fylld i de första
matriserna
H2(1,1)=H1(1,N1+1)-(Q0/Av2)^2*(K2)/(2*g); % Trycket efter ventilen =
Trycket före ventilen-ventilens tryckfall
Q2(1,1)=Q0; % Flödet=Q0 vid tiden 0
for i=2:N2+1 % Fyller den första raden i H2
och Q2
    H2(1,i)=H2(1,i-1)-f2*Deltax*(Q0/A2)^2/(D2*2*g); % Trycket
minskar längs röret pga förluster
    Q2(1,i)=Q0; % Stationärt
flöde
end

H3(1,1)=H2(1,N2+1);
Q3(1,1)=Q0;
for i=2:N3+1
    H3(1,i)=H3(1,i-1)-f3*L3*(Q0/A3)^2/(D1*2*g);
    Q3(1,i)=Q0;
end
%%% Tryck och flöden vid stationärt flöde är beräknade

for i=2:k % Stegar i tiden
    t=(i-1)*Deltat; % Beräknar aktuell tid

    Tau1=(t<=Tv1)*(Tau1-(Tau1-Tauf1)*(t/Tv1))+(t>Tv1)*Tauf1; % Tau
för ventil 1
    Tau2=(t<=Tv2)*(Tau2-(Tau2-Tauf2)*(t/Tv2))+(t>Tv2)*Tauf2; % Tau
för ventil 2
    K1=polyval(P,Tau1); % K för ventil 1
    K2=polyval(P,Tau2); % K för ventil 2

```



```

%%% Tryck och flöden i första röret
Cm=H2(i-1,2)-B*Q2(i-1,2);
Bm=B+R*abs(Q2(i-1,2));
C1=H1(i-1,N1+1)-H1(i-1,1)-L1*2*Q1(i-1,1)/(g*A1*Deltat);
C2=(L1/(g*A1))*((f1/(D1*A1))*abs(Q1(i-1,1))+(2/Deltat));

if Tau1==0
    Qb=0;
elseif Tau2==0
    Qb=0;
else

S=sign(g*(Av2^2*Ab^2*C2^2*Av1^2*g+2*Av2^2*Ab^2*C2*Av1^2*g*Bm+Av2^2*Ab^2*Bm^2*Av1^2*g+2*Av2^2*Ab^2*(K1)*H0-2*Av2^2*Ab^2*(K1)*Cm-2*Av2^2*Ab^2*(K1)*C1+2*Av2^2*Av1^2*Kb*H0-2*Av2^2*Av1^2*Kb*Cm-2*Av2^2*Av1^2*Kb*C1+2*Ab^2*(K2)*Av1^2*H0-2*Ab^2*(K2)*Av1^2*Cm-2*Ab^2*(K2)*Av1^2*C1));
    Qb=-S*Av1*(Av2*Ab*C2*Av1*g+Av2*Ab*Bm*Av1*g-(abs(g*(Av2^2*Ab^2*C2^2*Av1^2*g+2*Av2^2*Ab^2*C2*Av1^2*g*Bm+Av2^2*Ab^2*Bm^2*Av1^2*g+2*Av2^2*Ab^2*(K1)*H0-2*Av2^2*Ab^2*(K1)*Cm-2*Av2^2*Ab^2*(K1)*C1+2*Av2^2*Av1^2*Kb*H0-2*Av2^2*Av1^2*Kb*Cm-2*Av2^2*Av1^2*Kb*C1+2*Ab^2*(K2)*Av1^2*H0-2*Ab^2*(K2)*Av1^2*Cm-2*Ab^2*(K2)*Av1^2*C1)))^(1/2))*Av2*Ab/(Av2^2*Ab^2*(K1)+Av2^2*Av1^2*Kb+Ab^2*(K2)*Av1^2);
    end

    if Qb<0 % Om flödet är negativt stänger backventilen
        Q1(i,1)=0;
        Q1(i,N1+1)=0;
        Q2(i,1)=0;
    else
        Q1(i,1)=Qb; % Samma flöde i ändarna av rör ett pga rigid
        Q1(i,N1+1)=Qb;
        Q2(i,1)=Qb;
    end

    if Tau2==0 % Om Tau2=0 så är flödet 0 och samma
tryck i ändarna av rör 1
        H1(i,N1+1)=H1(i-1,N1+1);
        H1(i,1)=H1(i,N1+1);
        H2(i,1)=Cm+Bm*Q2(i,1);
    elseif Tau1==0
        H2(i,1)=Cm+Bm*Q2(i,1);
        H1(i,1)=H2(i,1);
        H1(i,N1+1)=H2(i,1);
    else
        H1(i,N1+1)=(Q1(i,1)/Av2)^2*(K2)/(2*g)+Cm+Bm*Q1(i,1);
        H1(i,1)=C1+C2*Q1(i,1)+H1(i,N1+1);
        H1(i,1)=H0-(Q1(i,1)/Ab)^2*Kb/(2*g)-(Q1(i,1)/Av1)^2*(K1)/(2*g);
    end
    H2(i,1)=Cm+Bm*Q2(i,1);

%%% Slut

%%% Randvillkor rör 3
Bp2=B+R*abs(Q2(i-1,N2));
Cp2=H2(i-1,N2)+B*Q2(i-1,N2);
C1=Hr-H3(i-1,1)-L3*2*Q3(i-1,1)/(g*A3*Deltat);
C2=(L3/(g*A3))*((f3/(D3*A3))*abs(Q3(i-1,1))+(2/Deltat));

Q2(i,N2+1)=(Cp2-C1-Hr)/(C2+Bp2);

```

```

    Q3(i,1)=Q2(i,N2+1);
    Q3(i,N3+1)=Q2(i,N2+1);
    H2(i,N2+1)=Cp2-Bp2*Q2(i,N2+1);
    H3(i,1)=C1+C2*Q3(i,1)+Hr;
    H3(i,N3+1)=Hr;

%%% Slut rör 3

    for j=2:N2 % Interna punkter i andra matrisen
(Rör 2)
        Cp2=H2(i-1,j-1)+B*Q2(i-1,j-1);
        Bp2=B+R*abs(Q2(i-1,j-1));
        Cm2=H2(i-1,j+1)-B*Q2(i-1,j+1);
        Bm2=B+R*abs(Q2(i-1,j+1));

        H2(i,j)=(Cp2*Bm2+Cm2*Bp2)/(Bp2+Bm2);
        Q2(i,j)=(Cp2-Cm2)/(Bp2+Bm2);

    end
end

for l=1:k
    h1(1,l)=H1(1,N1+1)*ro*g/10^5; % En vektor med tryck vid ventilen
(Nod 1)
    h2(1,l)=(H2(1,4)-10)*ro*g/10^5; % Tryck vid högsta punkten (Nod 2)
    h3(1,l)=(H2(1,44)+30)*ro*g/10^5; % Tryck vid lägsta punkten (Nod 3)
    t(1,l)=l*Deltat; % Tidsvektor
end

figure(1)
plot(t,h1,t,h2,t,h3)
grid
xlabel('Tid (S)')
ylabel('Tryck (bar abs)')
title('Tryck vid respektive nod för alternativ 2')

```