



Fakulteten för teknik- och naturvetenskap

Anna Persson

Grundläggande hyperbolisk geometri

Elements of Hyperbolic Geometry

Matematik
D-uppsats 20p

Datum:	06-05-23
Handledare:	Ilie Barza
Examinator:	Alexander Bobylev

Grundläggande hyperbolisk geometri

I denna uppsats presenteras grundläggande delar av hyperbolisk geometri. Uppsatsen är indelad i två kapitel. I första kapitlet studeras Möbiusavbildningar på Riemannsfären. Andra kapitlet presenterar modellen av hyperbolisk geometri i övre halvplanet H , skapad av Poincaré på 1880-talet.

Huvudresultatet i uppsatsen är Gauss – Bonnet's sats för hyperboliska trianglar.

Elements of Hyperbolic Geometry

In this thesis we present fundamental concepts in hyperbolic geometry. The thesis is divided into two chapters. In the first chapter we study Möbiustransformations on the Riemann sphere. The second part of the thesis deal with hyperbolic geometry in the upper half-plane. This model of hyperbolic geometry was created by Poincaré in 1880.

The main result of the thesis is Gauss – Bonnet's theorem for hyperbolic triangles.

Innehåll:

Inledning.....s 4

Kapitel 1. Möbiusavbildningar och dess egenskaper.....5

1.1 Riemannsfären.....	5
1.2 Definition av Möbiusavbildningar	9
1.3 Matriser som motsvarar Möbiusavbildningar	10
1.4 Bilder av cirklar och linjer genom Möbiusavbildningar	12
1.5 Konformitet	14
1.6 Fixpunkter	16
1.7 Paraboliska Möbiusavbildningar.....	18
1.8 Icke paraboliska Möbiusavbildningar	21
1.9 Geometrisk klassificering av icke paraboliska avbildningar.....	23
1.10 Cirklar genom paraboliska Möbiusavbildningar.....	28
1.11 Cirklar genom icke – paraboliska Möbiusavbildningar	31
1.12 Anharmoniska förhållanden	35
1.13 Anharmoniska förhållandens invarians.....	39

Kapitel 2. Hyperbolisk geometri..... 43

2.1 Övre halvplanet	43
2.2 Hyperbolisk båglängd	45
2.3 Geodetiska linjer	52
2.4 Isometrier av (H, ds)	58
2.5 Hyperboliska vinklar	60
2.6 Hyperbolisk area	61
2.7 Gauss – Bonnet’s sats för hyperboliska trianglar.....	62
2.8 Hyperboliska rotationer och translationer	68
2.9 Jämförelse mellan Euklidisk och hyperbolisk geometri	73

Referenser..... 75

Inledning:

I denna uppsats presenteras grundläggande delar av hyperbolisk geometri. Uppsatsen är indelad i två kapitel.

I första kapitlet studeras Möbiusavbildningar på Riemannsfären och deras viktigaste egenskaper. Att anharmoniska förhållandet och familjen av cirklar och räta linjer är invariants genom en Möbiusavbildning är egenskaper som är centrala i kapitel 1. Klassificeringen av Möbiusavbildningar med hjälp av deras fixpunkter är också ett avsnitt som studeras i första kapitlet. Denna klassificering är grundläggande för identifieringen av hyperboliska rotationer och translationer i kapitel 2.

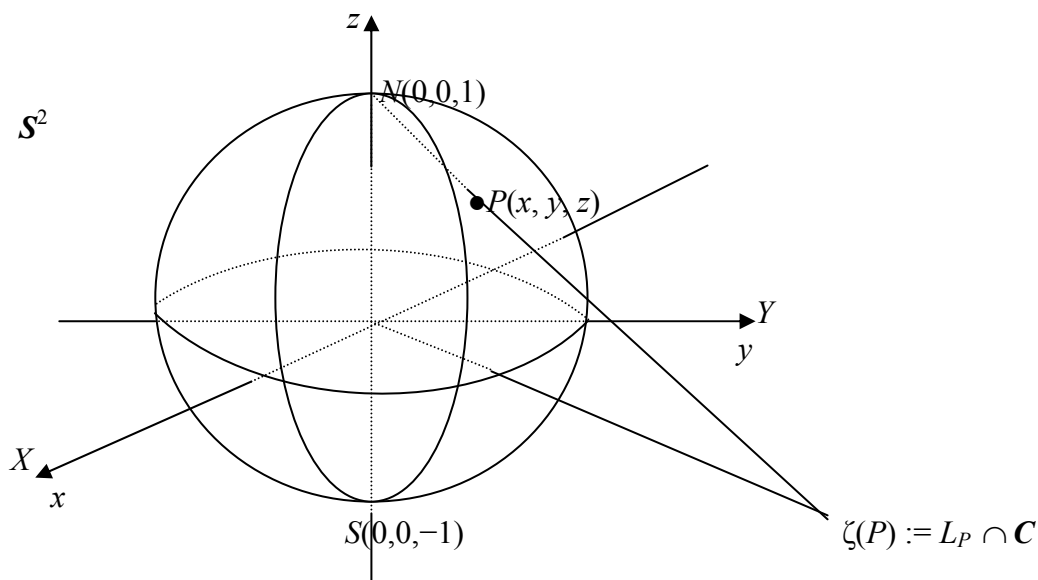
I kapitel 2 presenteras modellen av hyperbolisk geometri i H som skapades av Poincaré på 1880-talet. Bågelementet och det hyperboliska avståndet $d_H: H \times H \rightarrow [0, \infty[$ i H är begrepp som definieras. Senare definieras de geodetiska linjerna i H som kallas för de räta linjerna eller de hyperboliska räta linjerna i H . I uppsatsen presenteras även vinklar mellan kurvor och area i H samt de enklaste polygonerna d.v.s. de hyperboliska trianglarna. Arean av dessa trianglar kan beräknas enligt Gauss – Bonnet's sats som bevisas i kapitel 2. Efter beviset studeras ett avsnitt med hyperboliska rotationer och translationer och avslutningsvis görs en jämförelse mellan Euklidisk och hyperbolisk geometri. Den stora skillnaden mellan de två geometrierna är Euklides femte postulat om parallella linjer.

Jag vill passa på att tacka min handledare Ilie Barza för stort engagemang och föredömlig handledning av min uppsats.

Anna Persson
Karlstad 060523

Kapitel 1. Möbiusavbildningar och dess egenskaper

1.1 Riemannsfären



Figur 1.1. Riemannsfären

Vi betecknar med $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och $Z = X + iY \in \mathbf{C}$

Avbildningen $\xi: \mathbf{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ definierad genom $\xi(P) = L_P \cap \mathbf{C}$ för $P \neq N$ och $\xi(N) = \infty$, kallas den stereografiska projektionen av sfären \mathbf{S}^2 på $\hat{\mathbf{C}}$. Sfären \mathbf{S}^2 tillsammans med den stereografiska projektionen på $\hat{\mathbf{C}}$ kallas för Riemannsfären.

Oändligheten, ∞ , är en punkt utanför det komplexa talplanet.

$$\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

\mathbf{C} är XY -planet i figur 1.1. Punkten $(X, Y) = X + iY \in \mathbf{C}$ identifieras med punkten $(X, Y, 0)$ i \mathbf{R}^3 . Om man drar en rät linje genom en punkt $(X, Y) \in \mathbf{C}$ och nordpolen $N(0, 0, 1)$ så kommer linjen att skära \mathbf{S}^2 i punkten $P(x, y, z)$. Man får då att;

$$X = \frac{x}{1-z} \quad \text{och} \quad Y = \frac{y}{1-z}$$

$$\xi(P) = Z = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \quad \text{och} \quad \xi(N) = \infty.$$

$$\xi^{-1}(Z) = \xi^{-1}(X + iY) = P = \left(\frac{2 \operatorname{Re} Z}{|Z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} Z}{|Z|^2 + 1}, \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|^2 + 1} \right) \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$$

$$\text{och} \quad \xi^{-1}(\infty) = N.$$

Alla punkter på Riemannsfären kopplas då ihop med punkter $P \in \hat{\mathbf{C}}$.

Sats 1.1: Om Γ är en cirkel på \mathcal{S}^2 då är $\xi(\Gamma)$ en cirkel eller en rät linje i \mathbb{C} . Om $N(0,0,1) \notin \Gamma$ så är $\xi(\Gamma)$ en cirkel och om $N \in \Gamma$ så är $\xi(\Gamma)$ en rät linje $\cup \{\infty\}$.
Omvänt: Om Γ är en cirkel eller en rät linje i XY -planet så är $\xi^{-1}(\Gamma)$ en cirkel på \mathcal{S}^2 .

Bevis: Låt Γ vara en cirkel på \mathcal{S}^2 som **inte** innehåller N . Γ har ekvationerna:

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz + d = 0, \end{cases} \quad \text{så att } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{och} \quad c + d \neq 0$$

Dessutom måste avståndet $|d|$ från origo till planet $ax + by + cz + d = 0$ vara < 1 . (Om $|d| = 1$ så är planet tangent till sfären och cirkeln \mathbb{C} reduceras till en punkt. Om avståndet är > 1 så blir Γ lika med tomma mängden \emptyset).

Vi har att:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{1-z} & \text{och} & \xi(x, y, z) \\ Y = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

Låt (x, y, z) vara en godtycklig punkt på Γ .

$$Z = \xi(x, y, z) = X + iY, \quad \text{där} \quad X = \frac{x}{1-z} \quad \text{och} \quad Y = \frac{y}{1-z}$$

Vi får då att:

$$x = \frac{2X}{|Z|^2 + 1}; \quad y = \frac{2Y}{|Z|^2 + 1}; \quad z = \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|^2 + 1}$$

Om vi substituerar uttrycken för x , y och z i planets ekvation så får vi:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d = 0 & \Leftrightarrow \frac{2aX + 2bY + c(|Z|^2 - 1)}{|Z|^2 + 1} + d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (c+d)|Z|^2 + 2aX + 2bY + d - c = 0 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (c+d)(X^2 + Y^2) + 2aX + 2bY + d - c = 0 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + 2\frac{a}{c+d}X + 2\frac{b}{c+d}Y + \frac{d-c}{d+c} = 0 & \quad (1) \end{aligned}$$

Om vi sätter $\alpha = \frac{a}{c+d}$, $\beta = \frac{b}{c+d}$ och $\gamma = \frac{d-c}{d+c}$ kan vi skriva ekvation (1) som;

$$X^2 + Y^2 + 2\alpha X + 2\beta Y + \gamma = 0$$

Om vi kvadrat kompletterar (1) får vi följande uttryck:

$$\left(X + \frac{a}{c+d}\right)^2 + \left(Y + \frac{b}{c+d}\right)^2 + \frac{d-c}{c+d} - \frac{a^2}{(c+d)^2} - \frac{b^2}{(c+d)^2} = 0$$

Vi kan nu se att $\xi(\Gamma)$ är en cirkel med medelpunkt $\left(-\frac{a}{c+d}, -\frac{b}{c+d}\right)$ och radie $r > 0$ där,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{a^2 + b^2}{(c+d)^2} - \frac{d-c}{d+c} = \frac{a^2 + b^2 - (d-c)(d+c)}{(c+d)^2} = \frac{a^2 + b^2 - (d^2 - c^2)}{(c+d)^2} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c+d)^2} = \frac{1-d^2}{(c+d)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{1-d^2}}{|c+d|}. \end{aligned}$$

Låt oss nu betrakta fallet när Γ **innehåller** N .

Vi har sedan tidigare att:

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz + d = 0, \end{cases} \quad \text{där, } a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad c + d = 0 \quad \text{och} \quad |d| < 1$$

På samma sätt som i förra fallet så substituerar vi uttrycken för x , y och z i planets ekvation. Vi får igen att,

$$(c+d)(X^2 + Y^2) + 2aX + 2bY + d - c = 0, \text{ d.v.s}$$

$$2aX + 2bY + d - c = 0 \quad (2)$$

Ekvation (2) är en rät linje.

Detta betyder att $\xi(\Gamma)$ är den räta linjen L med ekvationen,

$$2aX + 2bY + d - c = 0$$

i XY -planet tillsammans med $\xi(N) = \infty$.

Låt oss nu betrakta Ω , en cirkel i XY -planet. Låt ekvationen för cirkeln Ω vara:

$$X^2 + Y^2 + mX + nY + p = 0, \quad (3)$$

$$\text{där } m, n, p \in \mathbf{R} \quad \text{och} \quad |p| < \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$$

Eftersom Ω är en cirkel, för $\mathbf{Z} \in \Omega$ så träffar den räta linjen genom \mathbf{Z} och nordpolen $N(0, 0, 1)$ \mathbf{S}^2 i punkten (x, y, z) med $z < 1$.

Vi har sedan tidigare att:

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}, \quad |Z|^2 = \frac{1+z}{1-z}$$

Om vi substituerar ovanstående uttryck för X , Y och $|Z|^2$ i ekvation (3) samt utnyttjar att $|Z|^2 = X^2 + Y^2$ så får vi att:

$$\frac{1+z}{1-z} + m \frac{x}{1-z} + n \frac{y}{1-z} + p = 0 \quad (4)$$

Ekvation (4) kan förenklas till:

$$mx + ny + (1-p)z + 1 + p = 0 \quad (5)$$

Ekvation (5) är ett plan som **inte** innehåller nordpolen N . $\xi^{-1}(\Omega)$ är alltså snittet mellan \mathcal{S}^2 och ett plan som inte innehåller N , dvs $\xi^{-1}(\Omega)$ är en cirkel på \mathcal{S}^2 som inte innehåller N .

Anta nu att Ω är en rät linje i XY -planet som har ekvationen:

$$AX + BY + C = 0 \quad \text{där } A, B, C \in \mathbf{R} \text{ och att } A^2 + B^2 > 0$$

Sätter vi in våra uttryck för X och Y så får vi:

$$A \frac{x}{1-z} + B \frac{y}{1-z} + C = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$Ax + By - Cz + C = 0 \quad (6)$$

Ekvation (6) beskriver ett plan som **innehåller** nordpolen $N(0,0,1)$. $\xi^{-1}(\Omega)$ är då snittet mellan \mathcal{S}^2 och planet (6).

□

Med tanke på den föregående satsen så kallar vi från och med nu cirkelarna och de räta linjerna i XY -planet för **cirklar** (eller generaliserande cirklar) i $\hat{\mathcal{C}} = \xi(\mathcal{S}^2)$. Om Ω är en rät linje så har $\Omega \cup \infty$ bilden genom ξ^{-1} av en cirkel genom N .

1.2 Definition av Möbiusavbildningar

Definition 1.1: Avbildningen $T: \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ definierad genom $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ där $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ och $\Delta = ad - bc \neq 0$ kallas för **Möbiusavbildning** (eller en Möbiustransformation av $\hat{\mathbf{C}}$).

$$T(\infty) = \infty \text{ om } c = 0 \text{ och } T(\infty) = \frac{a}{c} \text{ då } c \neq 0. \quad T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ i fallet då } c \neq 0.$$

Inversa funktionen T^{-1} ges om ekvationen löses med avseende på z :

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

T^{-1} är också en Möbiusavbildning och ges av:

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}; \quad T^{-1}(\infty) = \infty \text{ då } c = 0 \text{ och}$$

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \text{ och } T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \text{ då } c \neq 0.$$

Familjen av **alla** Möbiusavbildningar betecknas med $Möb$.

$$Möb = Möb^+ \cup Möb^-$$

$$Möb^+ \text{ består av } z \alpha \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}$$

$$Möb^- \text{ består av } z \alpha \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = -1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$$

Anmärkning:

1. Om $ad - bc = 0$ kan man se att T är en konstant funktion.
2. Man kan alltid ta $\Delta = 1$. (Om $\Delta \neq 0$ och $k \in \mathbf{C}$ är sådant att $k^2 = \Delta$,

$$Tz = \frac{\frac{a}{k}z + \frac{b}{k}}{\frac{c}{k}z + \frac{d}{k}} \text{ och } \Delta = \frac{ad}{k^2} - \frac{bc}{k^2} = \frac{ad - bc}{k^2} = 1 \text{ i detta fallet.})$$

3. Om $c = 0$, $T(\infty) := \infty = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z)$.
4. Om $c \neq 0$, $T(\infty) = \frac{a}{c} = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z)$ och $T\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$.

1.3 Matriser som motsvarar Möbiusavbildningar

Vid beräkningar med Möbiusavbildningar kan man använda matriser.

$$M_T := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ kallas för } \mathbf{matrisen} \text{ av } T.$$

M_T måste identifieras med $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ eftersom dessa (och endast dessa) matriser uppfyller

$$\text{kraven att } \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1 \text{ och } Tz = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$\chi(T) := a + d$, kallas för **spåret** av T . Spåret är också definierat upp till tecknet, d.v.s $\chi(T)$ kan

också vara talet $-a - d$ om vi tar matrisen $M_T = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$.

Sats 1.2: Om $S, T \in \text{Möb}$ så gäller att:

1. $M_{S \circ T} = M_S M_T$
2. $M_{T^{-1}} = M_T^{-1}$
3. $\chi(S \circ T) = \chi(T \circ S)$.

Bevis:

1. Anta att $Sz = \frac{az + b}{cz + d}$ och $Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Matriserna blir då:

$$M_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ och } M_S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$(S \circ T)(z) = \frac{a \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + b}{c \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + d} = \dots = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + \beta c + d\delta} \Rightarrow$$

$$M_{S \circ T} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = M_S M_T \text{ d.v.s (1)}$$

$$2. \text{ Anta att } Tz = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow M_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, T^{-1}z = \frac{dz-b}{-cz+a} \Rightarrow M_{T^{-1}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$[M_T]^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = M_{T^{-1}} \text{ (eftersom } ad - bc = 1 \text{)}.$$

3. Vi ser i (1) att $\chi(S \circ T) = a\alpha + b\gamma + c\beta + d\delta$

$$(T \circ S)(z) = \frac{\alpha \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta}{\gamma \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \delta} = \dots = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}.$$

$$M_{T \circ S} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}$$

$$\chi(T \circ S) = \alpha a + \beta c + \gamma b + \delta d = \chi(S \circ T)$$

Följdsats: $\chi(S^{-1} \circ T \circ S) = \chi(T)$ för godtyckliga Möbiusavbildningar T och S .

Anmärkning:

Två Möbiusavbildningar kallas för **konjugerade** om det finns en Möbiusavbildning S så att:

$$U = S^{-1} T S$$

Den föregående följsatsen kan omformuleras som:

Konjugerade Möbiusavbildningar har samma spår.

$$\chi(S^{-1} \circ T \circ S) = \chi(T \circ S \circ S^{-1}) = \chi(T)$$

1.4 Bilder av cirklar och linjer genom en Möbiusavbildning

Sats 1.3: Om Γ är en (generaliserad) cirkel och T är en Möbiusavbildning så gäller att $T(\Gamma)$ också är en (generaliserad) cirkel.

Bevis: I xy -planet beskrivs en rät linje allmänt på formen

$$ax + by + c = 0; \quad a, b, c \in \mathbf{R} \text{ och } a^2 + b^2 \neq 0 \quad (1)$$

Vi ska nu uttrycka denna ekvation i termer av $z = x + iy$ och $\bar{z} = x - iy$, där \bar{z} är komplexkonjugatet av z .

Från uttrycken med z och \bar{z} erhålls att:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{och} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

När vi nu substituerar uttrycken för x och y får vi följande uttryck;

$$\frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z} + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + c = 0 \quad (2)$$

där $\alpha \neq 0$ därför att $|\alpha| = \frac{1}{2}|a - bi| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} > 0$

Ekvation (2) beskriver familjen av alla räta linjer i \mathbf{C} .

En cirkel med radien r och medelpunkt (a, b) beskrivs av ekvationen;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

där $\alpha = -2a$, $\beta = -2b$ och $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$

medelpunkt $(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$; $r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma}$; $r \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$

Ekvationen; $A(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (3)

innehåller alla cirklar för $A \neq 0$ och alla räta linjer för $A = 0$ i planet.

Låt oss beteckna med Ω , familjen av alla (generaliserade) cirklar i det komplexa talplanet XOY :

$$\Omega = \{ \Gamma \subset \mathbf{C} \mid \Gamma = \text{generaliserad cirkel} \}$$

Vi måste bevisa att $T(\Omega) = \Omega$.

Låt $\Gamma \in \Omega$ vara given av ekvationen,

$$A(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{där } A, \alpha, \beta \text{ och } \gamma \in \mathbf{R} \quad (3)$$

Genom att använda att $z = x + iy$ och $\bar{z} = x - iy$ skrivs ekvation (3) på formen,

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)z + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\bar{z} + \gamma = 0 \quad (4)$$

Vi får då att Γ beskrivs med hjälp av den komplexa variabeln z som:

$$Az\bar{z} + mz + \bar{m}\bar{z} + \gamma = 0 \quad A, \gamma \in \mathbf{R}, \quad m \in \mathbf{C} \quad (4)$$

Om T är given av:

$$Tz = w = u + iv = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C} \quad \text{och} \quad \Delta = ad - bc = 1$$

så ges dess invers T^{-1} av:

$$z = T^{-1}w = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Genom att substituera $z = \frac{dw - b}{-cw + a}$ i ekvation (4) får vi att:

$$A \left(\frac{dw - b}{-cw + a} \right) \left(\frac{\bar{d}\bar{w} - \bar{b}}{-\bar{c}\bar{w} + \bar{a}} \right) + \bar{m} \left(\frac{\bar{d}\bar{w} - \bar{b}}{-\bar{c}\bar{w} + \bar{a}} \right) + \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(dw - b)(\bar{d}\bar{w} - \bar{b}) + m(dw - b)(-\bar{c}\bar{w} + \bar{a}) + \bar{m}(\bar{d}\bar{w} - \bar{b})(-cw + a) + \gamma(-cw + a)(-\bar{c}\bar{w} + \bar{a}) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A'w\bar{w} + m'w + m''\bar{w} + \gamma' = 0 \quad (5)$$

där koefficienterna ges av:

$$\begin{aligned} A' &= (Add\bar{d} - md\bar{c} - \bar{m}\bar{d}c + \gamma\bar{c}c) = A|d|^2 - 2\operatorname{Re}(md\bar{c}) + \gamma|c|^2 \\ m' &= (md\bar{a} - Ad\bar{b} + \bar{m}\bar{b}c - \gamma\bar{a}c) \\ m'' &= (mb\bar{c} - Ab\bar{d} + \bar{m}\bar{a}a - \gamma\bar{c}a) \\ \gamma' &= (Ab\bar{b} - mb\bar{a} - \bar{m}\bar{b}a + \gamma\bar{a}a) = A|b|^2 - 2\operatorname{Re}(mb\bar{a}) + \gamma|a|^2 \end{aligned}$$

Vi ser att $m' = \bar{m}'$ och att $A', \gamma' \in \mathbf{R}$. $T(\Gamma)$ är alltså given av ekvationen:

$$A'w\bar{w} + m'w + \bar{m}'\bar{w} + \gamma' = 0 \quad \text{där } A', \gamma' \in \mathbf{R} \quad (6)$$

Ekvation (6) visar att $T(\Gamma)$ är en generaliserad cirkel.

Sammanfattningsvis får vi:

$$T(\Gamma) \in T(\Omega), \Gamma \text{ godtycklig} \Leftrightarrow T(\Omega) \subseteq \Omega$$

Eftersom T^{-1} också är en Möbiusavbildning får vi att:

$$T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega.$$

Slutligen får vi:

$$\Omega = T(T^{-1}(\Omega)) \subseteq T(\Omega) \subseteq \Omega$$

d.v.s

$$T(\Omega) = \Omega \text{ och satsen är bevisad.}$$

□

1.5 Konformitet

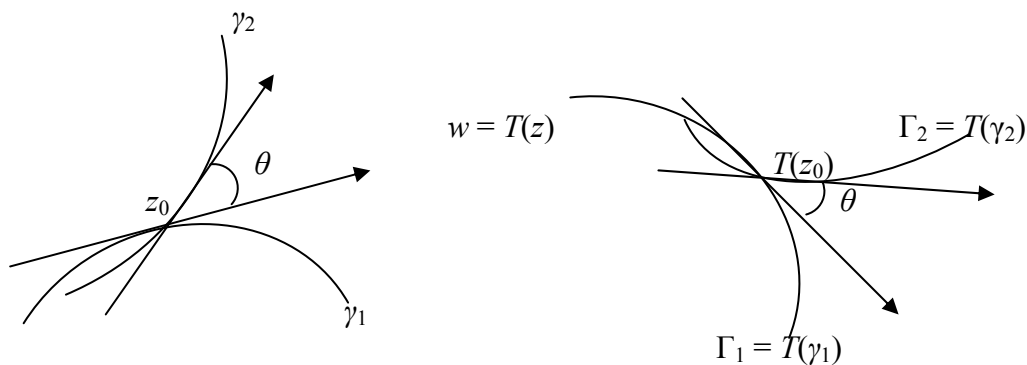
Definition 1.2: En konform avbildning är en avbildning $T: \Omega \rightarrow D$, $z \mapsto w = T(z)$ som bevarar vinklar till storlek och riktning där Ω och D är områden i \mathbb{C} .

En kurva Γ i komplexa talplanet kan parametriseras enligt:

$$\Gamma: z(t) = x(t) + iy(t), t \in I = \text{intervall} \subseteq \mathbb{R}.$$

Vi antar att $t \mapsto z(t)$ är deriverbar och att derivatan $\dot{z} = dz/dt$ är kontinuerlig och **skild från noll** överallt. En sådan kurva kallas **regulär** och har en bestämd tangentvektor $v(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)] \neq \bar{0}$ i varje punkt.

Låt $T: \Omega \rightarrow D$, $z \mapsto w = T(z)$, vara en avbildning och låt två godtyckliga kurvor skära varandra med en vinkel θ i punkten z_0 . θ är genom definition vinkeln mellan tangentvektorerna till de två kurvorna i den gemensamma punkten. Avbildningen T kallas för **konform** i punkten z_0 om beloppet av θ är detsamma som för vinkeln mellan bildkurvorna, se figur 1.2. Om T är konform i alla punkter i ett område Ω så är T konform på Ω .

z – planet: w – planet:

Figur 1.2. En konform avbildning bevarar vinklar till storlek och riktning.

Sats 1.4: Avbildningen T är konform i alla punkter z_0 där $T'(z_0) \neq 0$.

Bevis: Anta att z och w är komplexa tal där $z = x + iy$ och $w = u + iv$.

Euklidiska skalärprodukten av vektorerna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ är:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = xu + yv$$

$$\langle z, w \rangle = xu + yv, \quad z, w \neq 0 \text{ och } \theta \in [0, \pi]$$

$$\langle z, w \rangle = |z||w|\cos\theta, \quad \theta = \arccos \frac{\langle z, w \rangle}{|z||w|}$$

Bildkurvans tangentvektor ges av:

$$\Gamma_1'(t_0) = T'(z_0)\gamma_1'(t_0) \quad \text{där } z_0 = z(t_0).$$

$$\langle \alpha z, w \rangle = \alpha \langle z, w \rangle \quad \text{om } \alpha \in \mathbf{R}$$

Om α och $\beta \in \mathbf{C}$ får vi att:

$$\langle \alpha z, w \rangle = \operatorname{Re}(\alpha z \bar{w}) \quad \text{och}$$

$$\langle \alpha z, \beta w \rangle = \operatorname{Re}(\alpha z \overline{\beta w}) = \operatorname{Re}(\alpha z \bar{\beta} \bar{w}) = \operatorname{Re}(\alpha \bar{\beta} z \bar{w})$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \langle \alpha z, \alpha w \rangle = \operatorname{Re}(\alpha \bar{\alpha} z \bar{w}) = |\alpha|^2 \operatorname{Re}(z \bar{w}) = |\alpha|^2 \langle z, w \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{vinkeln mellan } (\Gamma'_1(t_0), \Gamma'_2(t_0)) &= \arccos \frac{\langle \Gamma'_1(t_0), \Gamma'_2(t_0) \rangle}{|\Gamma'_1(t_0)| |\Gamma'_2(t_0)|} = \arccos \frac{\langle T'(z_0) \gamma'_1(t_0), T'(z_0) \gamma'_2(t_0) \rangle}{|T'(z_0) \gamma'_1(t_0)| |T'(z_0) \gamma'_2(t_0)|} \\ &= \arccos \frac{|T'(z_0)|^2 \langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle}{|T'(z_0)|^2 |\gamma'_1(t_0)| |\gamma'_2(t_0)|} = \arccos \frac{\langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle}{|\gamma'_1(t_0)| |\gamma'_2(t_0)|} = \text{vinkeln mellan } (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0)). \end{aligned}$$

□

Följdsats: T Möbiusavbildning $\Rightarrow T$ konform.

Bevis: $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ där $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2} \neq 0$ i alla punkter.

□

1.6 Fixpunkter

Möbiusavbildningar klassificeras med hjälp av sina fixpunkter. En fixpunkt till en avbildning T är lösning till ekvationen:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z, \text{ där } z \in \hat{\mathbf{C}} \text{ och } a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc = 1$$

Vi vet från definitionen av Möbiusavbildningar att för $c = 0$ har vi $T(\infty) = \infty$ och i fallet då $c \neq 0$ är $T(\infty) = \frac{a}{c}$ och $T(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Avbildningen $T: \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ är bijektiv och dess invers $T^{-1}: \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ är given av:

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}; T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}; T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \text{ (för } c \neq 0)$$

Den identiska avbildningen $I, I(z) = z$ ($\forall z \in \hat{\mathbf{C}}$), har varje punkt $z \in \hat{\mathbf{C}}$ som fixpunkt. Från och med nu så antar vi att $T \neq I$.

Spåret χ som definierades i kap 1.3 som $\chi := a + d$, visar sig vara ett bra hjälpmedel vid klassificering av Möbiusavbildningar.

Sats 1.5: Ekvationen $T(z) = z$, $z \in \hat{\mathbf{C}}$, har högst två lösningar.

Bevis:

Fall 1: $c = 0$:

$$Tz = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$$

Vi ser här att $T(\infty) = \infty$. En lösning till ekvationen och därmed en fixpunkt är alltså $z_2 = \infty$. Om $\alpha \neq 1$, dvs om $a \neq d$ så har ekvationen ytterligare en lösning, $z_1 \in \mathbf{C}$.

$$T(z) = z \Leftrightarrow \alpha z + \beta = z \Leftrightarrow (\alpha - 1)z = -\beta \Leftrightarrow z = z_1 = \frac{\beta}{1 - \alpha} \in \mathbf{C}$$

Om $a \neq d$ så har T två fixpunkter: $z_1 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ (där $\alpha = \frac{a}{d}$ och $\beta = \frac{b}{d}$) och $z_2 = \infty$.

Om $a = d$ ($\Leftrightarrow \alpha = 1$) så blir T , $Tz = z + \lambda$, ($\lambda = \frac{b}{d} \neq 0$, eftersom vi antagit att $T \neq I$).

För $z \in \mathbf{C}$, $z + \lambda \neq z$. I det här fallet så har T bara fixpunkten $z_2 = \infty$.

Fall 2: $c \neq 0$:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$T(-\frac{d}{c}) = \infty$ och $-\frac{d}{c} \in \mathbf{C}$; $-\frac{d}{c}$ är alltså **inte** en fixpunkt till T .

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbf{C} \Rightarrow \infty \text{ är ingen fixpunkt.}$$

Vi fortsätter att söka efter (eventuella) fixpunkter $z \in \mathbf{C}$ (dvs $z \neq \infty$).

$$Tz = z \Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0 \quad (1)$$

Eftersom (1) är en andragsgradsekvation har T **högst** två fixpunkter nämligen rötterna till ekvationen (1).

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc)}}{2c} = \\ &= \frac{a - d \pm \sqrt{\chi^2 - 4(ad - bc)}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} \end{aligned}$$

I fallet då T endast har en fixpunkt $\Leftrightarrow \chi^2 = 4$. Här får vi då att $z_1 = z_2 = \frac{a - d}{2c}$.

För $\chi^2 \neq \pm 2$ så har T två fixpunkter;

$$z_1 = \frac{a-d-\sqrt{\chi^2-4}}{2c} \quad \text{och} \quad z_2 = \frac{a-d+\sqrt{\chi^2-4}}{2c}$$

□

Följsats: Om $T \in \text{Möb}$ och T har fler än tre fixpunkter så är $T = I$. (Om $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ och är parvis olika samt om $T(z_k) = z_k$ för $k \in \overline{1,3}$ då är $T = I$).

Följsats: Om $S, T \in \text{Möb}$ och om $(\exists) z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ som är parvis skilda och $S(z_k) = T(z_k)$ för $k \in \overline{1,3}$ då är $S = T$ d.v.s. $S(z) = T(z) \quad (\forall) z \in \hat{\mathbf{C}}$.

1.7 Paraboliska Möbiusavbildningar

Definition 1.3: Möbiusavbildningen T kallas för **parabolisk** om den endast har **en fixpunkt** $z \in \hat{\mathbf{C}}$.

(Eftersom T som ges av $Tz = z + \lambda$, där $\lambda \neq 0$, är parabolisk så definieras även I som parabolisk. Alltså är $Tz = z + \lambda$, $(\forall) z \in \hat{\mathbf{C}}$, parabolisk $(\forall) \lambda \in \mathbf{C}$.)

Fall 1: När T är parabolisk och oändligheten är enda fixpunkten, $z_1 = \infty$, får vi att $a = d$ vilket reducerar avbildningen till;

$$Tz = z + \lambda, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

Fall 2: T parabolisk och $z_1 \in \mathbf{C}$.

$$T = \frac{az+b}{cz+d}; \quad \chi^2 = 4; \quad z_1 = z_2 = \frac{a-d}{2c}$$

Den **normala formen** för avbildningen T skrivs som:

$$\frac{1}{Tz - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + c \quad (9)$$

Vi kan visa detta genom att använda oss av att $a + d = 2$ samt att $Tz_1 = z_1$.

$$\begin{aligned}
Tz - Tz_1 &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \\
&= \frac{aczz_1 + bcz_1 + adz + bd - aczz_1 - adz_1 - bcz - bd}{(cz + d)(cz_1 + d)} = \\
&= \frac{z - z_1}{(cz + d)(cz_1 + d)}
\end{aligned}$$

Om vi inverterar detta uttryck får vi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Tz - Tz_1} &= \frac{(cz + d)(cz_1 + d)}{z - z_1} = \left| \text{utnyttja att } z = z - z_1 + z_1 \right| = \\
&= \frac{z(c^2z_1 + cd) + cdz_1 + d^2}{z - z_1} = \frac{(z - z_1)(c^2z_1 + cd) + c^2z_1^2 + cdz_1 + d^2}{z - z_1} = \\
&= c^2z_1 + cd + \frac{c^2z_1^2 + 2cdz_1 + d^2}{z - z_1} = \frac{(cz_1 + d)^2}{z - z_1} + c(cz_1 + d) = \left| \text{utnyttja att } cz_1 + d = \right. \\
&= \frac{a - d}{2} + d = \frac{a + d}{2} = 1 \left| = \frac{1}{z - z_1} + c
\end{aligned}$$

Vi fick alltså att:

$$\frac{1}{Tz - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + c \quad (9)$$

Vi betraktar fallet då $\chi = 2$ och substituerar z mot Tz i (9) får vi:

$$\frac{1}{T^2z - z_1} = \frac{1}{Tz - z_1} + c = \frac{1}{z - z_1} + 2c$$

Genom matematisk induktion får vi att:

$$\frac{1}{T^m z - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + mc \quad (\forall) m \in \mathbb{N}$$

Om vi gör samma substitution med z mot $T^{-1} z$ ekvation (9) får vi att:

$$\frac{1}{T(T^{-1}(z)) - z_1} = \frac{1}{T^{-1}(z) - z_1} + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{T^{-1}(z) - z_1} + c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T^{-1}(z) - z_1} = \frac{1}{z - z_1} - c$$

Genom matematisk induktion får vi att:

$$\frac{1}{T^m z - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + mc \quad (\forall) m \in \mathbf{Z}, m \leq -1$$

Slutligen får vi att:

$$\frac{1}{T^m z - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + mc, (\forall) m \in \mathbf{Z}$$

Vi kan dra slutsatsen att T^m är parabolisk $(\forall) m \in \mathbf{Z}$.

Sats 1.7: T parabolisk $\Leftrightarrow |\chi| = 2$ och $\chi \in \mathbf{R}$.

Bevis: ” \Rightarrow ”

Fall 1: då $c = 0 \Rightarrow Tz = z + \lambda$

Eftersom $a = d = 1 \Rightarrow \chi = a + d = 2$

Fall 2: $c \neq 0, z_1 = z_2 \in \mathbf{C}$

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \quad \Leftrightarrow \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c}, z_1 + z_2 = \frac{a - d}{c} \text{ och } z_1 z_2 = -\frac{b}{c}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \chi^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \chi = \pm 2 \Leftrightarrow |\chi| = 2 \text{ och } \chi \in \mathbf{R}.$$

Vi har visat att då T är parabolisk $\Rightarrow \chi = 2$ eller -2 . □

Vi ska nu visa det omvända,
 ” \Leftarrow ” $\chi = 2 \Rightarrow T$ parabolisk

Fall 1: $c = 0$ och $|\chi| = 2$, $\chi \in \mathbf{R}$.

$$Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad ad = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{d}, \quad a + d = 2$$

$$d = 2 - a \Rightarrow a(2 - a) = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1; \quad a = d = 1 \Rightarrow$$

$Tz = z + b$, denna avbildning är parabolisk

” \Leftarrow ”

Fall 2: $c \neq 0$ och $|\chi| = 2$, $\chi \in \mathbf{R}$.

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} = \frac{a - d}{2c}$$

$$z_1 = z_2 = \frac{a - d}{2c}$$

Eftersom $z_1 = z_2$ har T endast en fixpunkt och är därmed parabolisk. □

1.8 Icke-paraboliska Möbiusavbildningar

Definition 1.4: Möbiusavbildningen kallas för **icke-parabolisk** om den har fler än en fixpunkt, d.v.s. **två** fixpunkter.

Fall 1: $c = 0$.

$$Tz = \alpha z + \beta, \quad \alpha \neq 0; 1$$

$$z_1 = \frac{\beta}{1 - \alpha} \text{ och } z_2 = \infty \quad (Tz_1 = z_1)$$

Genom matematisk induktion får man att $T^k(z_1) = z_1$ (\forall) $k \in \mathbf{Z}$. På samma sätt får man att $T^k(\infty) = \infty$. z_1 och ∞ är alltså fixpunkter till T^k , $k \in \mathbf{Z}^*$. För avbildningarna $T^k \neq I \Rightarrow T^k$ är icke-parabolisk.

Normala formen blir här ($c = 0$):

$$Tz - Tz_1 = \alpha (z - z_1) \quad (\forall) z \in \hat{\mathcal{C}} \quad (2)$$

Talet α betecknas med $k(T)$ och kallas för **multiplikatorn** av T .

$$Tz - Tz_1 = k(T)(z - z_1) \quad (\forall) z \in \hat{\mathcal{C}} \quad (2')$$

Fall 2: $c \neq 0$, $z_1 \neq z_2$ och $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c}$$

$$T(z_1) = z_1 \quad \text{och} \quad T(z_2) = z_2 \quad ; \quad Tz \neq z \quad (\forall) z \in \hat{\mathcal{C}} \setminus \{z_1; z_2\}$$

Ekvationen i w ,

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad k \neq 0, 1 \quad (3)$$

leder till $w = w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, dvs w är ett element i *Möb*. Vi betecknar w med S .

Vi får då uttrycket:

$$\frac{S(z) - z_1}{S(z) - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad k \neq 0, 1 \quad (4)$$

Då $z = z_1$ får vi:

$$\frac{S(z_1) - z_1}{S(z_1) - z_2} = 0, \quad \text{dvs} \quad S(z_1) = z_1$$

Då $z = z_2$ får vi:

$$\frac{S(z_2) - z_1}{S(z_2) - z_2} = \infty. \quad \text{Alltså är} \quad S(z_2) = z_2$$

$k \neq 1 \Rightarrow S \neq I$. S har alltså bara z_1 och z_2 som fixpunkter.

Om vi väljer ett värde på k sådant att $S(\infty) = T(\infty)$ får vi att $S = T$.

$$S(\infty) = T(\infty) \Leftrightarrow S = T \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{c} - z_1}{\frac{a}{c} - z_2} = k \cdot 1 \Leftrightarrow k = \frac{a - cz_1}{a - cz_2}, \quad T(\infty) = \frac{a}{c} = S(\infty)$$

Detta värde på k betecknas som $k(T)$ och kallas för **multiplikatorn** till T .

Ekvation (4) blir då:

$$\frac{T(z) - z_1}{T(z) - z_2} = k(T) \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (5)$$

Sammanfattningsvis kan vi nu skriva:

$$\left. \begin{aligned} Tz - z_1 &= k(T)(z - z_1) && \text{om } T(z_1) = z_1 \text{ och } T(\infty) = \infty. \\ \frac{T(z) - z_1}{T(z) - z_2} &= k(T) \frac{z - z_1}{z - z_2} && \text{om } z_1, z_2 \in \mathbf{C} \text{ och } z_1 \neq z_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

I båda fallen (6) ovan kallas ekvationerna för **den normala formen** av avbildningen T .

$k(T) \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ (därför att T inte är konstant och $T \neq I$).

Anmärkning: Då T är parabolisk definieras $k(T) = 1$.

Det finns ett användbart samband mellan multiplikatorn k och spåret χ :

$$k + \frac{1}{k} = \dots = \chi^2 - 2$$

1.9 Geometrisk klassificering av icke-paraboliska avbildningar

Anmärkningar:

$$T \text{ icke-elliptisk} \Rightarrow [k(T)]^m \neq 1, (\forall) m \in \mathbf{Z}^*$$

Multiplikatorn, $k(T)$ kan skrivas på polär form:

$$k(T) = \rho e^{i\theta} \text{ där } \rho > 0 \text{ och } \theta \in]-\pi; \pi] \quad (7)$$

Uttrycket (7) för $k(T)$ möjliggör en klassificering av icke-paraboliska Möbiusavbildningar.

Definition 1.5:

- (i) T kallas för **elliptisk** om $\rho = 1$ och $\theta \neq 0$
- (ii) T kallas för **hyperbolisk** om $\rho \neq 1$ och $\theta = 0$
- (iii) T kallas för **loxodromisk** om $\rho \neq 1$ och $\theta \neq 0$

Några egenskaper hos $k(T)$

Fall 1: $z_1 = \infty$

$$T(z) - z_1 = k(T)(z - z_1)$$

$$\begin{aligned} T^2(z) - z_1 &= (T \circ T)(z) - (T \circ T)(z_1) = T(T(z)) - z_1 = k(T)[T(z) - z_1] = \\ &= [k(T)]^2 (z - z_1) \end{aligned}$$

Genom **matematisk induktion** får vi att:

$$T^m(z) - z_1 = [k(T)]^m (z - z_1), \quad (\forall) m \in \mathbf{N}$$

Fall 2: $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $(z_1 \neq z_2)$

$$\frac{T(z) - z_1}{T(z) - z_2} = k(T) \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (\forall) z \in \hat{\mathbf{C}} \quad (5)$$

Om vi byter ut z med Tz i (5) får vi:

$$\frac{T^2 z - z_1}{T^2 z - z_2} = k(T) \frac{Tz - z_1}{Tz - z_2} = [k(T)]^2 \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Genom matematisk induktion får vi:

$$k(T^m) = [k(T)]^m, \quad (\forall) m \in \mathbf{N}$$

I båda fallen gäller att $k(T^m) = [k(T)]^m$, $(\forall) m \in \mathbf{N}$. Den föregående likheten gäller även för $m \in \mathbf{Z}$, där $m \leq -1$.

Vi kan nu sammanfatta våra resultat i två ekvationer:

$$\left. \begin{aligned} T^m(z) - z_1 &= [k(T)]^m (z - z_1), \quad (\forall) m \in \mathbf{N}, \text{ fall 1} \\ \frac{T^m(z) - z_1}{T^m(z) - z_2} &= [k(T)]^m \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (\forall) z \in \hat{\mathbf{C}} \text{ och } (\forall) m \in \mathbf{Z}, \text{ fall 2} \end{aligned} \right\} (8)$$

Det finns fall när $m \geq 2$ och $k(T)^m = 1$

Exempel:

$$k(T) \in \{ \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1} \}, \quad \varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)$$

$$(\sqrt[m]{1} = \{ 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1} \})$$

I detta fall är T, T^2, \dots, T^{m-1} elliptiska och $T^m = I$. Ett sådant element kallas för **cykliskt element** i $Möb^+$.

T cykliskt element i $Möb^+ \Leftrightarrow T$ **elliptisk** och $k(T) = e^{\frac{i2\pi}{m}} = e^{it}$, $t \in \mathcal{Q}$

Följande sats ger en karaktärisering av ickeparaboliska Möbiusavbildningar med hjälp av spåret.

Sats 1.8: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $a, b, c, d, \in \mathbf{C}$, $ad - bc = 1$

1. T är elliptisk $\Leftrightarrow \chi \in \mathbf{R}$ och $|\chi| < 2$
2. T är hyperbolisk $\Leftrightarrow \chi \in \mathbf{R}$ och $|\chi| > 2$
3. T är loxodromisk $\Leftrightarrow \chi \notin \mathbf{R}$

Bevis: “ \Rightarrow ”

1. Vi antar nu att T är elliptisk, d.v.s.,

$$k(T) = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\chi^2 - 2 = k + \frac{1}{k} = 2 \cos \theta$$

$$\chi^2 = 2 + 2 \cos \theta = 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\chi = \pm 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

Vi får alltså att $\chi \in \mathbf{R}$, $|\chi| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| < 2$, eftersom $0 < \frac{\theta}{2} < \pi$

Då T är elliptisk $\Rightarrow \chi \in \mathbf{R}$ och $|\chi| < 2$

□

” \Leftarrow ”

Vi antar nu att $\chi \in \mathbf{R}$ och $|\chi| < 2$ och ska bevisa att T är elliptisk.

$$\chi \in \mathbf{R} \text{ och } |\chi| < 2 \Rightarrow \frac{\chi}{2} \in]-1, 1[$$

$$(\exists) \theta \in]0, \pi[\text{ så att } \frac{\chi}{2} = \cos \theta$$

$$\chi = 2 \cos \theta, \quad \theta = \arccos \frac{\chi}{2} \in]0, \pi[$$

$$k + \frac{1}{k} = \chi^2 - 2 = 4\cos^2 \theta - 2 = 2(\cos^2 \theta - 1) = 2\cos 2\theta$$

$$k^2 - 2k\cos 2\theta + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta - 1}}{1} = \cos 2\theta \pm i \sin 2\theta$$

$$k_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta, \text{ där } |k_1| = |k_2| = 1$$

$$k_1 = e^{i2\theta} \text{ där } 0 < 2\theta < 2\pi \Rightarrow T \text{ är elliptisk}$$

□

Bevis: 2) Vi skall bevisa att är T hyperbolisk $\Leftrightarrow \chi \in \mathbf{R}$ och $|\chi| > 2$

” \Rightarrow ”

$$k = \rho e^{i\theta} \text{ (då är } T \text{ hyperbolisk har vi att } \theta = 0 \text{ och } \rho > 0, \neq 1)$$

$$k = \rho \in]0, \infty[\setminus \{1\}$$

$$\chi^2 - 2 = k + \frac{1}{k} = \rho + \frac{1}{\rho} \Rightarrow$$

$$\chi^2 = \rho + 2 + \frac{1}{\rho} = \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right)^2 \text{ och } \sqrt{\rho} \in]0, \infty[\setminus \{1\}$$

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \geq 2 \text{ eftersom } t + \frac{1}{t} \geq 2 \text{ (}\forall t > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^2 \geq 0$$

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$$

Vi får alltså att:

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} > 2 \Rightarrow \chi^2 = \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right)^2 > 4$$

$$\chi = \pm \left| \sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right| \Rightarrow \chi \in \mathbf{R}$$

$$\chi \in \mathbf{R} \text{ och } |\chi| > 2.$$

” \Leftarrow ” Vi ska nu bevisa det omvända, nämligen att

$$\chi \in \mathbf{R} \text{ och } |\chi| > 2 \Rightarrow T \text{ hyperbolisk}$$

$$k + \frac{1}{k} = \chi^2 - 2$$

$$k^2 - k(\chi^2 - 2) + 1 = 0$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = \chi^2 - 2 > 2 \\ k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 \text{ och } k_2 \text{ har samma tecken.} \end{cases}$$

$$k_{1,2} = \frac{\chi^2 - 2 \pm \sqrt{(\chi^2 - 2)^2 - 4}}{2} = \frac{\chi^2 - 2 \pm \sqrt{\chi^4 - 4\chi^2}}{2} = \frac{\chi^2 - 2 \pm \chi\sqrt{\chi^2 - 4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in \mathbf{R}, k > 0 \quad \Rightarrow k = \rho e^{i\theta}, \theta = 0, \rho > 0$$

$$k_1 + k_2 > 0 \Rightarrow \text{åtminstone } k_1 \text{ eller } k_2 > 0$$

Vi får alltså att $k_1 > 0, k_2 > 0$ d.v.s T är hyperbolisk

□

3) I tredje och sista fallet då T varken är parabolisk, elliptisk eller hyperbolisk är den loxodromisk.

$$T \text{ loxodromisk} \Leftrightarrow \chi \notin \mathbf{R}.$$

Sammanfattningsvis kan vi nu skriva att då $\chi \in \mathbf{R}$ är T ,

parabolisk, $\chi = 2$.

elliptisk, $|\chi| < 2$

hyperbolisk, $|\chi| > 2$,

samt i fallet då $\chi \notin \mathbf{R}$ är T loxodromisk då $\chi \notin \mathbf{R}$.

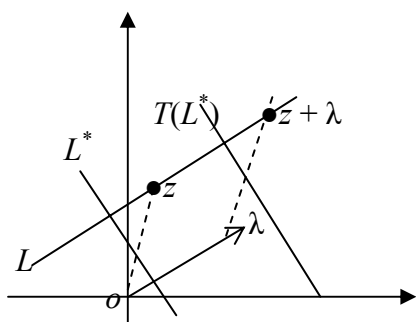
1.10 Cirklar genom paraboliska Möbiusavbildningar

De olika typerna av Möbiusavbildningar har olika egenskaper. Vi ska här studera familjer av cirklar och räta linjer som är invarianta genom Möbiusavbildningar. Vi börjar med att undersöka fallet då Möbiusavbildningen T är parabolisk.

T parabolisk:

Fall 1: Avbildningens fixpunkt, $z_1 = \infty$. $Tz = z + \lambda$ där $\lambda \neq 0$. Vi identifierar $\lambda \in \mathbf{C}$ med vektorn som har origo i o och ändpunkten λ . Låt L vara en rät linje som är parallell med λ , se figur 1.3. Det är då uppenbart att $T(L) = L$. Om L^* är en rät linje som är vinkelrät med λ då är $T(L^*)$ också en linje som är vinkelrät med λ .

T invarierar de räta linjerna parallella med λ och invarierar familjen av de räta linjer som är ortogonala med λ .



Figur 1.3. Parabolisk avbildning med ∞ som enda fixpunkt.

Fall 2: Möbiusavbildningen T har en ändlig fixpunkt $z_1 \in \mathbf{C}$. Avbildningens normala form är:

$$\frac{1}{Tz - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + c, \quad (c \neq 0 \text{ därför att } T \neq I) \quad (1)$$

Låt oss ta $S_T, U_T \in \text{Möb}$ där:

$$S_T z = \frac{1}{z - z_1} \quad \text{och} \quad U_T z = z + c$$

Möbiusavbildningens normala form (1) blir då:

$$S_T \circ T = U_T \circ S_T \quad (1')$$

(1') kan skrivas som:

$$T = S_T^{-1} \circ U_T \circ S_T \quad (2)$$

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

Låt Δ_0 vara är den räta linjen genom fixpunkten z_1 som är parallell med vektorn

$$c = c_1 + ic_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \text{ se figur 1.4.}$$

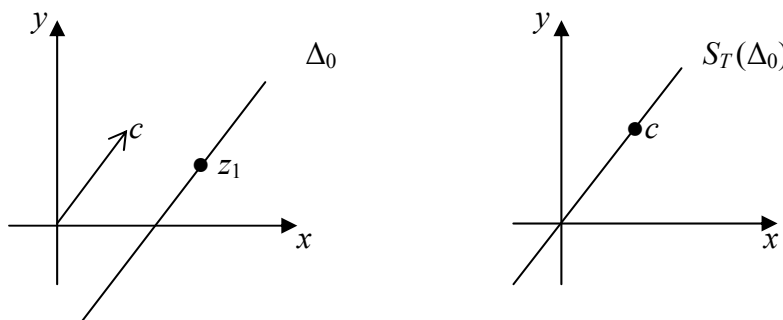
Den räta linjen Δ_0 's ekvation är:

$$c_2(x - x_1) - c_1(y - y_1) = 0 \quad (3)$$

där $z_1 = x_1 + iy_1$ är T 's fixpunkt.

För $z \in \Delta_0$ och $w = u + iv = S_T z$ får vi:

$$w = \frac{1}{z - z_1} \Leftrightarrow z - z_1 = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \quad (4)$$



Figur 1.4. Parabolisk avbildning då T har en ändlig fixpunkt.

Eftersom z ligger på Δ_0 så gäller ekvation (3). Ur samband (4) så får vi att:

$$\left. \begin{aligned} x - x_1 &= \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad (\text{realdelen av } \frac{1}{w}) \\ y - y_1 &= -\frac{v}{u^2 + v^2}, \quad (\text{imaginär delen av } \frac{1}{w}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Om vi substituerar (5) i (3) så får vi att:

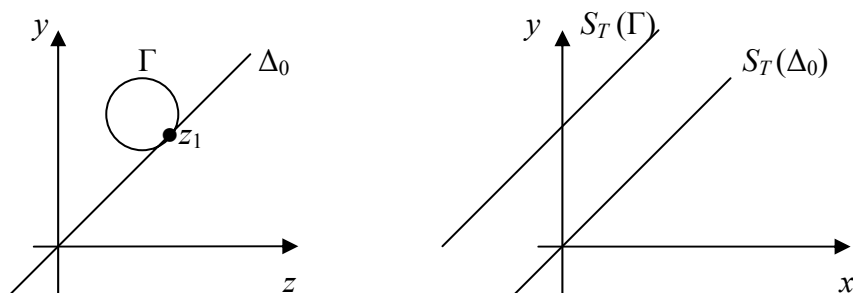
$$\frac{c_2 u}{u^2 + v^2} - \frac{c_1 v}{u^2 + v^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 u - c_1 v = 0 \quad (6)$$

Vi kan här se att $S_T(\Delta_0)$ är den räta linjen som går genom origo och punkten c se figur 1.4. Alltså är $U_T(S_T(\Delta_0)) = S_T(\Delta_0)$ och följaktligen,

$$T(\Delta_0) = S_T^{-1}(U_T(S_T(\Delta_0))) = S_T^{-1}(S_T(\Delta_0)) = \Delta_0$$

Δ_0 är alltså invariant med avseende på Möbiusavbildningen T .

Låt nu Γ vara en cirkel som tangerar räta linjen Δ_0 i punkten z_1 se figur 1.5.



Figur 1.5.

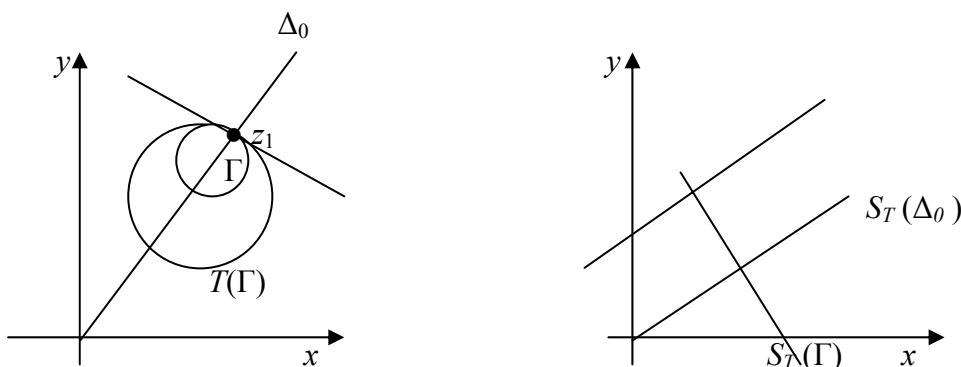
$S_T(\Gamma)$ är **en rät linje** som endast har ∞ som gemensam punkt med den räta linjen $S_T(\Delta_0)$ i $\hat{\mathcal{C}} \Rightarrow S_T(\Gamma) \parallel S_T(\Delta_0)$.

Eftersom $U_T z = z + c$, $U_T(S_T(\Gamma)) = S_T(\Gamma)$ därför att $U_T w = w + c$ (\forall) w .

$$T(\Gamma) = S_T^{-1}(U_T(S_T(\Gamma))) = S_T^{-1}(S_T(\Gamma)) = \Gamma$$

Cirkeln Γ är alltså invariant med avseende på T .

Låt oss nu ta en annan cirkel Γ som är ortogonal mot de föregående cirklarna d.v.s. Γ har medelpunkten på Δ_0 och går genom **fixpunkten** z_1 , se figur 1.6.



Figur 1.6

$S_T(\Gamma)$ är en rät linje som är ortogonal mot $S_T(\Delta_0)$. $U_T(S_T(\Gamma))$ är en rät linje $\perp S_T(\Delta_0)$.

$T(\Gamma) = S_T^{-1}(U_T(S_T(\Gamma)))$ = en cirkel av samma familj d.v.s. en cirkel med medelpunkt på Δ_0 och som går genom fixpunkten z_1 . Γ och $T(\Gamma)$ har alltså samma tangent i z_1 .

Familjen av alla cirklarna med medelpunkt på Δ_0 och som går genom z_1 är invariant med avseende på T .

Sammanfattningsvis kan vi skriva att T invarierar **cirklarna** genom z_1 som tangerar Δ_0 och invarierar **familjen** av cirklarna som är ortogonala mot de föregående cirklarna som går genom z_1 .

1.11 Cirklar genom icke – paraboliska Möbiusavbildningar

Vi skall nu studera fallen då Möbiusavbildningen T är **icke parabolisk** och vi börjar med studien av de **elliptiska** avbildningarna T ; $Tz = \frac{az + b}{cz + d}$.

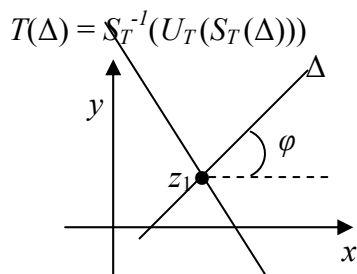
Fall 1: $c = \infty$. $z_1 \in C$ och $z_2 = \infty$.

Den normala formen av T är i detta fall,

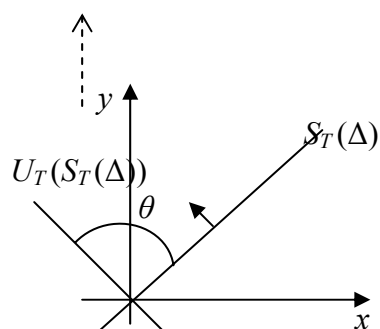
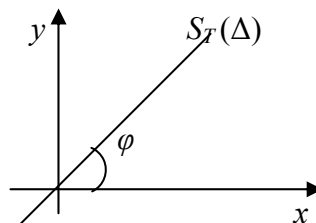
$$Tz - z_1 = k(T)(z - z_1) \text{ där } k(T) = e^{i\theta}, \theta \neq 0 \text{ och } -\pi < \theta \leq \pi$$

$$S_T \circ T = U_T \circ S_T \Leftrightarrow T = S_T^{-1} \circ U_T \circ S_T$$

U_T är en rotation kring origo. ($U_T(z) = ze^{i\theta}$ och $S_T(z) = z - z_1$)



Figur 1.7



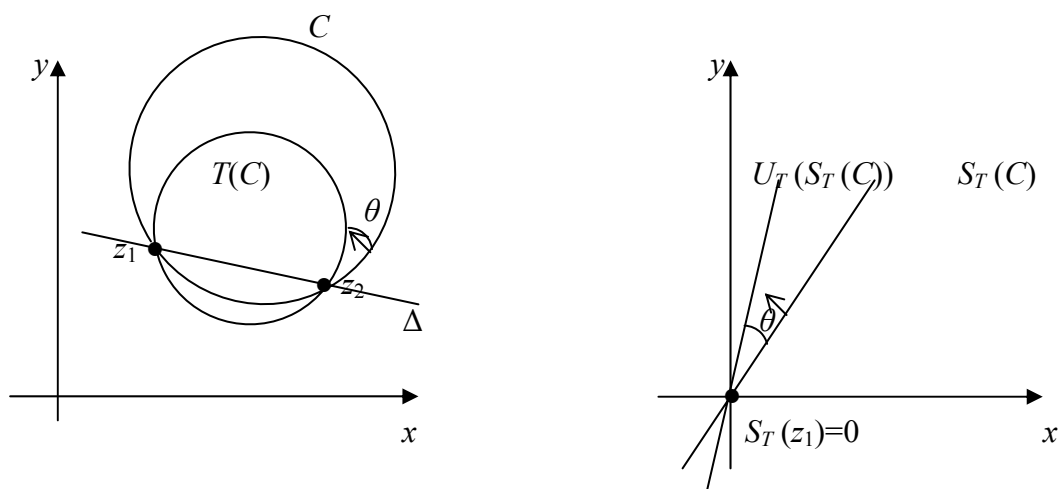
Figur 1.8

T roterar de räta linjerna genom z_1 kring z_1 med vinkeln θ . Om γ är en cirkel med medelpunkt z_1 så är $T(\gamma) = \gamma$. T roterar alltså med vinkeln θ kring z_1 de räta linjerna genom z_1 och invarierar cirklarna med medelpunkt z_1 d.v.s. cirklarna som är ortogonala mot de räta linjerna genom z_1 .

Fall 2: Vi har två fixpunkter z_1 och $z_2 \in \mathbb{C}$. (och T elliptisk)

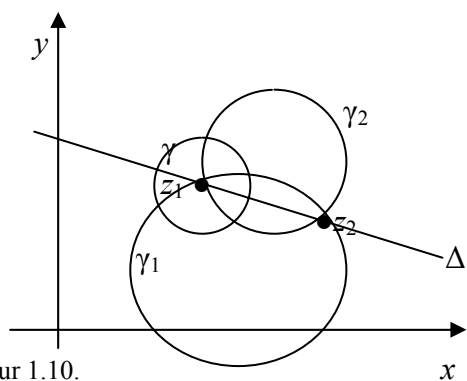
$$S_T z = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (S_T(z_1) = 0, \quad S_T(z_2) = \infty)$$

$$U_T z = ze^{i\theta}, \quad T = S_T^{-1} \circ U_T \circ S_T$$



Figur 1.9

$S_T(C)$ är en rät linje som innehåller origo. $U_T(S_T(C))$ är en annan linje genom origo som fås genom att rotera $S_T(C)$ med vinkeln θ . $S_T^{-1}(U_T(S_T(C)))$ skall vara en annan cirkel genom z_1 och z_2 som bildar vinkeln θ med C .



Figur 1.10.

Låt γ vara en cirkel som är ortogonal mot två cirklar genom γ_1 och γ_2 , se figur 1.10. En av dessa två cirklar kan vara den rätta linjen Δ genom z_1 och z_2 . $S_T(\gamma)$ skall vara en cirkel ortogonal mot $S_T(\gamma_1)$ och $S_T(\gamma_2)$. Eftersom $S_T(\gamma_1)$ och $S_T(\gamma_2)$ är två rätta linjer genom origo och $S_T(\gamma)$ är ortogonal mot var och en ska $S_T(\gamma)$ vara en cirkel med medelpunkt på $S_T(\gamma_1)$ och $S_T(\gamma_2)$ d.v.s. $S_T(\gamma)$ har medelpunkten $S_T(\gamma_1) \cap S_T(\gamma_2) = \{0\} = \text{origo}$.

Följaktligen är $S_T(\gamma)$ ortogonal mot **alla** linjerna genom origo och vi kan nu dra slutsatsen att γ är ortogonal mot **alla** cirkklarna genom z_1 och z_2 .

Alltså: Om γ är en cirkel ortogonal mot **två** cirklar genom z_1 och z_2 då är γ ortogonal mot **familjen** av cirkklarna genom z_1 och z_2 .

$$U_T(S_T(\gamma)) = S_T(\gamma) \text{ och } T(\gamma) = (S_T^{-1} \circ U_T \circ S_T)(\gamma) = \gamma$$

Med andra ord så invarierar avbildningen T cirkklarna som är ortogonala mot cirkklarna genom z_1 och z_2 .

Slutsats: En elliptisk avbildning invarierar **familjen av cirklar** som går genom z_1 och z_2 och varje cirkel som är ortogonal mot den föregående familjen.

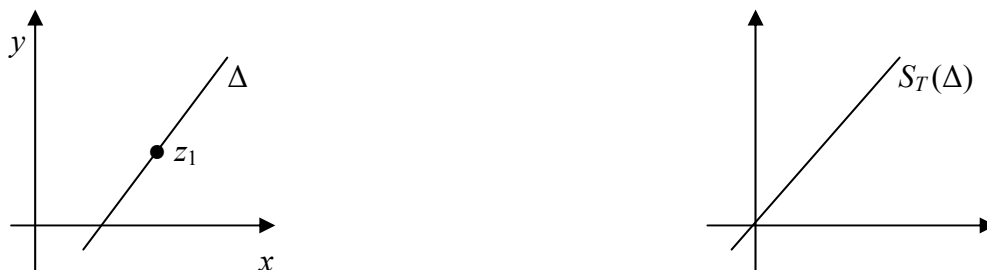
Vi ska nu behandla fallet då T är **hyperbolisk**.

Fall 1: $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty$.

Avbildningens normala form är,

$$T(z) - z_1 = k(T)(z - z_1), \quad k(T) = \rho \in]0, \infty[\setminus \{1\}$$

$$U(T) = \rho z \quad (\text{kontraktion eller dilation})$$



Figur 1.11.

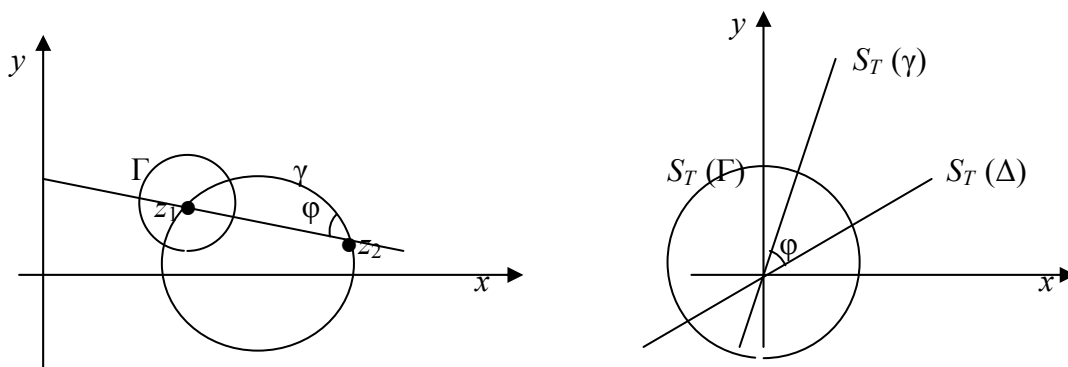
Låt oss betrakta en linje Δ som går genom z_1 . $S_T(\Delta)$ skall vara en linje genom origo parallell med Δ , se figur 1.11.

$$U_T(S_T(\Delta)) = S_T(\Delta) \Rightarrow T(\Delta) = S_T^{-1}(U_T(S_T(\Delta))) = \Delta$$

T invarierar cirkklarna genom z_1 och z_2 .

Fall 2: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$

$$S_T z = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad U_T z = \rho z, \quad T = S_T^{-1} \circ U_T \circ S_T$$



Figur 1.12.

Låt γ vara en cirkel genom z_1 och z_2 se figur 1.12. $S_T(\gamma)$ är en linje genom origo.

$U_T(S_T(\gamma)) = S_T(\gamma)$ (eftersom U_T är en kontraktion eller dilation)

$$\Rightarrow T(\gamma) = S_T^{-1}(U_T(S_T(\gamma))) = \gamma$$

T invarierar cirkelarna genom z_1 och z_2 .

Låt oss nu betrakta en cirkel Γ som är ortogonal mot cirkelarna genom z_1 och z_2 , se figur 1.12. Som tidigare räcker det att anta att Γ är ortogonal mot en cirkel genom z_1 och z_2 och mot den räta linjen Δ genom z_1 och z_2 .

$S_T(\Gamma)$ är en cirkel med medelpunkt i origo. $U_T(S_T(\Gamma))$ är en **annan** cirkel med medelpunkt i origo eftersom U_T är en kontraktion eller dilation. $S_T^{-1}(U_T(S_T(\Gamma))) = T(\Gamma)$ skall vara en annan cirkel som är ortogonal mot cirkelarna genom z_1 och z_2 .

Slutsats:

En hyperbolisk avbildning T invarierar cirkelarna genom z_1 och z_2 och familjen av cirkelarna som är ortogonala mot de föregående cirkelarna.

1.12 Anharmoniska förhållanden

Det finns en enkel och mycket användbar metod för att konstruera Möbiusavbildningar med särskilda krav. Om vi t ex har två cirklar Γ_1 och Γ_2 så finns det oändligt många Möbiusavbildningar som avbildar Γ_1 på Γ_2 .

Definition 1.6: Ett anharmoniskt förhållande som genereras av de tre parvis distinkta punkterna z_1, z_2 och $z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ är en Möbiusavbildning $\mathcal{S}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ som uppfyller villkoret $\mathcal{S}(\{z_1, z_2, z_3\}) = \{0, 1, \infty\}$.

Eftersom mängden av alla permutationer av $\{0; 1; \infty\}$ har $3! = 6$ olika element följer det att varje fix mängd $\{z_1, z_2, z_3\}$ skapar exakt sex olika anharmoniska förhållanden. Vi betecknar med \mathcal{S}_0 det enda anharmoniska förhållandet som uppfyller villkoren:

$$\mathcal{S}_0(z_1) = 0; \mathcal{S}_0(z_2) = 1; \mathcal{S}_0(z_3) = \infty$$

En tydligare notation för $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ är $\mathcal{S}_0(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_{0, 1, \infty}$.

Om $z_{1,2,3} \in \mathbb{C}$, så är $\mathcal{S}_0 z = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$

Definition 1.7: Om $z_{1,2,3} \in \mathbb{C}$ och $z = \infty$ så är $\mathcal{S}_0(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{S}_0(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$

(Vilket är det samma som att skriva, $[\infty, z_1, z_2, z_3]_0 = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$).

De andra fem anharmoniska förhållanden noteras på följande sätt:

$$\mathcal{S}_k(z) \text{ eller } [z, z_1, z_2, z_3]_k$$

För $k = 1, 2, 3, 4$ och 5 får vi följande uttryck;

$$\mathcal{S}_1(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_1 := [z, z_1, z_2, z_3]_{1, \infty, 0}$$

$$\mathcal{S}_2(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_2 := [z, z_1, z_2, z_3]_{\infty, 0, 1}$$

$$\mathcal{S}_3(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_3 := [z, z_1, z_2, z_3]_{1, 0, \infty}$$

$$\mathcal{S}_4(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_4 := [z, z_1, z_2, z_3]_{0, \infty, 1}$$

$$\mathcal{S}_5(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_5 := [z, z_1, z_2, z_3]_{\infty, 1, 0}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_1(z) &= [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_3}{z - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \\ &1, \infty, 0 \\ \mathcal{S}_1(\infty) &= [z, z_1, z_2, z_3]_1 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \end{aligned} \right\} \text{1:a förhållandet}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_2(z) &= [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_2}{z - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \\ &\infty, 0, 1 \\ \mathcal{S}_2(\infty) &= [\infty, z_1, z_2, z_3]_2 = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \end{aligned} \right\} \text{2:a}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_3(z) &= [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \\ &1, 0, \infty, \\ \mathcal{S}_3(\infty) &= [\infty, z_1, z_2, z_3]_3 = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \end{aligned} \right\} \text{3:e}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_4(z) &= [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \\ &0, \infty, 1, \\ \mathcal{S}_4(\infty) &= [\infty, z_1, z_2, z_3]_4 = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \end{aligned} \right\} \text{4:e}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_5(z) &= [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_3}{z - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \\ &\infty, 1, 0 \\ \mathcal{S}_5(\infty) &= [\infty, z_1, z_2, z_3]_5 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \end{aligned} \right\} \text{5:e}$$

I de fall när z_1, z_2 eller $z_3 = \infty$ får vi följande förhållanden:

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{S}_0(z) = [z, \infty, z_2, z_3] = [z, \infty, z_2, z_3]_0 = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \\
 \quad \quad \quad 0, 1, \infty \\
 \\
 \mathcal{S}_0(z) = [z, z_1, \infty, z_3] = [z, z_1, \infty, z_3]_0 = \frac{z - z_1}{z - z_3} \\
 \quad \quad \quad 0, 1, \infty \\
 \\
 \mathcal{S}_0(z) = [z, z_1, z_2, \infty] = [z, z_1, \infty, z_3]_0 = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \\
 \quad \quad \quad 0, 1, \infty \\
 \\
 \mathcal{S}_1(z) = [z, \infty, z_2, z_3] = [z, \infty, z_2, z_3]_1 = \frac{z - z_3}{z - z_2} \\
 \quad \quad \quad 1, \infty, 0 \\
 \\
 \mathcal{S}_1(z) = [z, z_1, \infty, z_3] = [z, z_1, \infty, z_3]_1 = \frac{z - z_3}{z_1 - z_3} \\
 \quad \quad \quad 1, \infty, 0 \\
 \\
 \mathcal{S}_1(z) = [z, z_1, z_2, \infty] = [z, z_1, \infty, z_3]_1 = \frac{z_1 - z_2}{z - z_2} \\
 \quad \quad \quad 1, \infty, 0 \\
 \\
 \mathcal{S}_2(z) = [z, \infty, z_2, z_3] = [z, \infty, z_2, z_3]_2 = \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} \\
 \quad \quad \quad \infty, 0, 1 \\
 \\
 \mathcal{S}_2(z) = [z, z_1, \infty, z_3] = [z, z_1, \infty, z_3]_2 = \frac{z_3 - z_1}{z - z_1} \\
 \quad \quad \quad \infty, 0, 1, \\
 \\
 \mathcal{S}_2(z) = [z, z_1, z_2, \infty] = [z, z_1, \infty, z_3]_2 = \frac{z - z_2}{z - z_1} \\
 \quad \quad \quad \infty, 0, 1
 \end{array}$$

O. S. V

De övriga förhållandena ser ut på liknande sätt och följer samma mönster.

En av de viktigaste egenskaperna hos det anharmoniska förhållandet är att de är invarianta med avseende på Möbiusavbildningarna.

Låt $T \in \text{Möb}$, $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ och $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Sats 1.9: För varje $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ har vi att $[z, z_1, z_2, z_3]_k = [Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3]_k$.
(För att kunna bevisa denna sats behövs lite mer teori så vi återkommer till detta lite senare.)

Specialfallen då $\{z_1, z_2, z_3\} = \{0, 1, \infty\}$

$m_0 = m_0(z) := [z, 0, 1, \infty] = z, \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$, d.v.s. m_0 = identitetsavbildningen av $\hat{\mathbb{C}}$
0, 1, ∞

$m_1(z) := [z, 0, 1, \infty] = [z, 0, 1, \infty]_1 = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-m_0(z)}$
1, ∞ , 0

$m_2(z) := [z, 0, 1, \infty] = [z, 0, 1, \infty]_2 = \frac{z-1}{z} = \frac{m_0(z)-1}{m_0(z)}$
 ∞ , 0, 1

$m_3(z) := [z, 0, 1, \infty] = [z, 0, 1, \infty]_3 = I - z = 1 - m_0(z)$
1, 0, ∞

$m_4(z) := [z, 0, 1, \infty] = [z, 0, 1, \infty]_4 = \frac{z}{z-1} = \frac{m_0(z)}{m_0(z)-1}$
0, ∞ , 1

$m_5(z) := [z, 0, 1, \infty] = [z, 0, 1, \infty]_5 = \frac{1}{z} = \frac{1}{m_0(z)}$
 ∞ , 1, 0

Mängden $\mathbf{M} := \{m_0 = I; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ bildar en grupp som är undergrupp till (Möb ($\hat{\mathbb{C}}$), \circ). Gruppen (\mathbf{M}, \circ) är kanoniskt isomorf med den symmetriska gruppen (σ_3, \circ) där $\sigma_3 = \{\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \mid \sigma = \text{bijektiv}\}$

Operationstabellen för \mathbf{M} med operationen ” \circ ” ser ut på följande sätt:

\circ	$m_0 = I$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
$m_0 = I$	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_1	m_2	m_0	m_5	m_3	m_4
m_2	m_2	m_0	m_1	m_4	m_5	m_3
m_3	m_3	m_4	m_5	m_0	m_1	m_2
m_4	m_4	m_5	m_3	m_2	m_0	m_1
m_5	m_5	m_3	m_4	m_1	m_2	m_0

Ur ovanstående tabell kan vi utläsa de inversa avbildningarna enligt följande:

$$m_0^{-1} = m_0, \quad m_1^{-1} = m_2, \quad m_2^{-1} = m_1, \quad m_3^{-1} = m_3, \quad m_4^{-1} = m_4 \quad \text{och} \quad m_5^{-1} = m_5$$

1.13 Anharmoniska förhållandens invarians

De anharmoniska förhållandena har en mycket bra och användbar egenskap nämligen att de är invarianta genom en Möbiusavbildning.

$$S_0 z = Sz = [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

$0, 1, \infty$

Vi har sedan tidigare att:

$$[z, z_1, z_2, z_3]_0 = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (1)$$

$$[\infty, z_1, z_2, z_3]_0 = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_1, z_2, z_3]_0 \quad (2)$$

$$[z, \infty, z_2, z_3]_0 = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} [z, z_1, z_2, z_3]_0 \quad (3)$$

$$[z, z_1, \infty, z_3]_0 = \frac{z - z_1}{z - z_3} = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} [z, z_1, z_2, z_3]_0 \quad (4)$$

$$[z, z_1, z_2, \infty]_0 = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} [z, z_1, z_2, z_3]_0 \quad (5)$$

$$T \in \text{Möb}, Tz = \frac{az + b}{cz + d}, \Delta = ad - bc \neq 0, w = Tz \quad (\forall) z \in \hat{\mathbf{C}}.$$

Vi betecknar $w_k = Tz_k, k = 1, 2, 3$.

Sats 1.10: Om $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ och är parvis olika så gäller att:

$$[Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3]_0 = [z, z_1, z_2, z_3]_0$$

Bevis: Om vi har ekvationerna (1) – (5) i åtanke är det tillräckligt att behandla fallen då $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ och $z \in \mathbf{C}$.

Fall 1: $w_1, w_2, w_3 \in \mathbf{C}$, vilket är det samma som att $z_k \neq -\frac{d}{c}$ för fallet när $c \neq 0$.

I fallet när $c = 0$ får vi att, $w = Tz = \alpha z + \beta$ med $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} [w, w_1, w_2, w_3]_0 &= \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \\ &= \frac{\alpha(z_2 - z_1)}{\alpha(z - z_3)} \cdot \frac{\alpha(z_2 - z_3)}{\alpha(z_2 - z_1)} = [z, z_1, z_2, z_3]_0 \end{aligned}$$

Om $c \neq 0$ och $z_{1,2,3} \neq -\frac{d}{c}$ får vi följande uttryck;

$$\begin{aligned} [w, w_1, w_2, w_3] &= \frac{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} \cdot \frac{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} = \dots = \\ &= [z, z_1, z_2, z_3]_0 \end{aligned}$$

Fall 2: $Tz_1 = w_1 = \infty \Leftrightarrow z_1 = -\frac{d}{c}$. Vi antar att $z_1^* \neq z_1, z_2, z_3$ och att $z_1^* \rightarrow z_1$.

Vi får då att:

$$\begin{aligned} [w, w_1, w_2, w_3]_0 &= \lim_{w_1^* \rightarrow w_1} [w, w_1^*, w_2, w_3]_0 = \lim_{z_1^* \rightarrow z_1} [Tz, Tz_1^*, Tz_2, Tz_3]_0 = \\ &= \lim_{z_1^* \rightarrow z_1} [z, z_1^*, z_2, z_3]_0 = [z, z_1, z_2, z_3]_0 \end{aligned}$$

$$z_1^* = T^{-1}(w_1^*) \rightarrow z_1 \text{ eftersom } T \text{ är en homeomorfism.}$$

På samma sätt kan man bevisa invariansen hos \mathcal{S}_0 i de andra fallen när $Tz_2 = \infty$ och $Tz_3 = \infty$.

Man kan utföra exakt samma bevis för de andra anharmoniska förhållandena \mathcal{S}_k men det finns en mycket kortare lösning.

Sats 1.11: För varje $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ så har vi att $\mathcal{S}_k = m_k \circ \mathcal{S}$, vilket är det samma som att säga att:

$$[z, z_1, z_2, z_3]_k = m_k([z, z_1, z_2, z_3]_0)$$

Bevis:

$k=0$: I fallet när $k=0$ gäller att $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ och $m_0 = I$. Vi får härmed att $\mathcal{S}_0 = m_0 \circ \mathcal{S}$.

$$k=1: \mathcal{S}_1(z) = [z, z_1, z_2, z_3]_{1, \infty, 0}$$

$$(m_1 \circ \mathcal{S})(z_1) = m_1(\mathcal{S}(z_1)) = m_1(0) = 1 = \mathcal{S}_1(z_1)$$

$$(m_1 \circ \mathcal{S})(z_2) = m_1(\mathcal{S}(z_2)) = m_1(I) = \infty = \mathcal{S}_1(z_2)$$

$$(m_1 \circ \mathcal{S})(z_3) = m_1(\mathcal{S}(z_3)) = m_1(\infty) = 0 = \mathcal{S}_1(z_3)$$

Eftersom Möbiusavbildningen är lika i tre parvis skilda punkter ger detta oss att:

$$(m_1 \circ \mathcal{S})(z) = \mathcal{S}_1(z), (\forall) z \in \hat{\mathcal{C}} \text{ och är det samma som att säga att } (m_1 \circ \mathcal{S}) = \mathcal{S}_1.$$

$$k = 2: \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_2(z) = [z, z_1, z_2, z_3] \\ \qquad \qquad \qquad \infty, 0, 1 \\ (m_2 \circ \mathcal{S})(z_1) = m_2(0) = \infty = \mathcal{S}_2(z_1) \\ (m_2 \circ \mathcal{S})(z_2) = m_2(1) = 0 = \mathcal{S}_2(z_2) \\ (m_2 \circ \mathcal{S})(z_3) = m_2(\infty) = 1 = \mathcal{S}_2(z_3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (m_2 \circ \mathcal{S})(z) = \mathcal{S}_2(\forall) z \in \hat{\mathcal{C}}$$

$$k = 3: \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_3(z) = [z, z_1, z_2, z_3] \\ \qquad \qquad \qquad 1, 0, \infty \\ (m_3 \circ \mathcal{S})(z_1) = m_3(0) = 1 = \mathcal{S}_3(z_1) \\ (m_3 \circ \mathcal{S})(z_2) = m_3(1) = 0 = \mathcal{S}_3(z_2) \\ (m_3 \circ \mathcal{S})(z_3) = m_3(\infty) = \infty = \mathcal{S}_3(z_3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (m_3 \circ \mathcal{S})(z) = \mathcal{S}_3(\forall) z \in \hat{\mathcal{C}}$$

$$k = 4: \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_4(z) = [z, z_1, z_2, z_3] \\ \qquad \qquad \qquad 0, \infty, 1 \\ (m_4 \circ \mathcal{S})(z_1) = m_4(0) = 0 = \mathcal{S}_4(z_1) \\ (m_4 \circ \mathcal{S})(z_2) = m_4(1) = \infty = \mathcal{S}_4(z_2) \\ (m_4 \circ \mathcal{S})(z_3) = m_4(\infty) = 1 = \mathcal{S}_4(z_3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (m_4 \circ \mathcal{S})(z) = \mathcal{S}_4(\forall) z \in \hat{\mathcal{C}}$$

$$k = 5: \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S}_5(z) = [z, z_1, z_2, z_3] \\ \qquad \qquad \qquad \infty, 1, 0 \\ (m_5 \circ \mathcal{S})(z_1) = m_5(0) = \infty = \mathcal{S}_5(z_1) \\ (m_5 \circ \mathcal{S})(z_2) = m_5(1) = 1 = \mathcal{S}_5(z_2) \\ (m_5 \circ \mathcal{S})(z_3) = m_5(\infty) = 0 = \mathcal{S}_5(z_3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (m_5 \circ \mathcal{S})(z) = \mathcal{S}_5(\forall) z \in \hat{\mathcal{C}}$$

Nu kan vi utföra beviset för \mathcal{S}_k 's invarians med avseende på Möbiusavbildningarna.

Bevis: (1.7)

$T \in \text{Möb}$. Vi har tidigare visat att:

$$[Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3]_0 = [z, z_1, z_2, z_3]_0$$

Vi kan nu använda oss av att,

$$\begin{aligned} [Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3]_k &= m_k ([Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3]_0) = \\ &= m_k ([z, z_1, z_2, z_3]_0) = [z, z_1, z_2, z_3]_k \end{aligned}$$

□

Kapitel 2. Hyperbolisk geometri

Den icke-Euklidiska geometrin upptäcktes av Bolyai, Lobachevsky och Gauss i början av 1800-talet. I detta kapitel ska vi presentera grundläggande begrepp och resultat i denna geometri.

Enligt Felix Klein's filosofi om olika typer av geometri så måste man för att få tala om geometri ha en mängd M och en grupp G av bijektiva avbildningar $T: M \rightarrow M$. Geometri på (M, G) betyder, enligt Klein, att studera egenskaperna hos delmängder av M som är invarianta med avseende på verkan på M av elementen i G . Meningen med det föregående påståendet klarnar när vi börjar studien av icke-Euklidiska geometrin som också kallas för den hyperboliska geometrin (enligt Bolyai – Lobachevski).

2.1 Övre halvplanet

Modellen av den hyperboliska geometrin som vi ska studera upptäcktes/skapades av Poincaré på 1880-talet. Som plan i den hyperboliska geometrin kan man (enligt Poincaré) använda antingen det övre halvplanet,

$$H := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

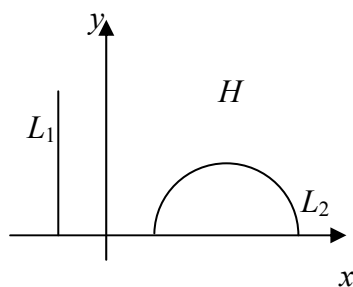
eller enhetsdisken,

$$D = D_1(0) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

Dessa två modeller kan identifieras via den konforma avbildningen:

$$T: H \rightarrow D, \quad Tz = \frac{z-i}{z+i} \quad (\forall) z \in H.$$

Vi använder oss här av modellen med övre halvplanet, H , se figur 2.1.



Figur 2.1. Modellen övre halvplanet.

H skall vara det hyperboliska planet.

Räta linjer i H är Euklidiska halvlinjer av formen:

$$L := \{z \in H \mid \operatorname{Re} z = k = \text{konstant}\}$$

eller Euklidiska halvcirklar i H med medelpunkt på ox – axeln.
Punkter i det hyperboliska planet H är vanliga punkter i H .

Om $T \in \text{Möb}^+$ så avbildas reella axeln \mathbf{R} på sig själv om och endast om T endast har reella koefficienter.

Sats 2.1: $T \in \text{Möb}^+$ har egenskapen $T(H) = H$ då och endast då $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$,
($ad - bc = 1$) och $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Bevis: ” \Rightarrow ”

T är en **homeomorfism** $\Rightarrow T(\text{randen av } H) = \text{randen av } T(H)$.

$$\partial H = \text{randen av } H \text{ i } \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

Fall 1: $c \neq 0$. Vi har då att:

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} \text{ och } T^{-1}z = \frac{dz-b}{-cz+a} \text{ där } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ och } ad - bc = 1$$

Eftersom T avbildar $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ på $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ så får vi att:

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbf{R}, \quad T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \in \mathbf{R} \text{ och } \quad T(0) = \frac{b}{d} \in \mathbf{R}$$

Vi kan nu se att $Tz = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$ har reella koefficienter.

$T \in \text{Möb}^+$ och $T(H) = H \Rightarrow a, b, c, d \in \mathbf{R}$ (och $ad - bc = 1$)

Fall 2: $c = 0$.

$$Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \text{ och } T^{-1}z = \frac{d}{a}z - \frac{b}{a}$$

Eftersom T avbildar $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ på $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ så får vi att:

$$T^{-1}(0) = -\frac{b}{a} \in \mathbf{R} \text{ och } T^{-1}(\infty) = \frac{d}{a} \in \mathbf{R}, \quad \det T = ad = 1$$

Vi får alltså att

$$\frac{a}{d} \in \mathbf{R} \text{ och att } \frac{b}{d} \in \mathbf{R}$$

” \Leftarrow ”

Vi antar nu att $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$ samt att $Tz = \frac{az + b}{cz + d}$ och visar att $T(H) = H$.

Det är klart sedan tidigare att $T(\mathbf{R} \cup \{\infty\}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

$$w = u + iv = Tz \Rightarrow v = \operatorname{Im} w = \frac{y}{|cz + d|^2} \text{ eftersom,}$$

$$\begin{aligned} w = Tz &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(\overline{cz + d})}{|cz + d|^2} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} = \\ &= \frac{ac|z|^2 + bd + adx + bcx + iady - ibcy}{|cz + d|^2} \Rightarrow v = \operatorname{Im} w = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} = \frac{y}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

Vi har alltså visat att $z \in H \Leftrightarrow y > 0 \Leftrightarrow v > 0 \Leftrightarrow w \in H$.

Slutligen får vi att $T(H) = H$.

□

2.2 Hyperbolisk båglängd.

Man förser H med bågelementet ds (som upptäcktes av Cayley) som ges av:

$$ds := \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Med hjälp av ds kan man definiera längden (eller ds -längden eller hyperboliska längden) av kurvor i H som är styckvis släta.

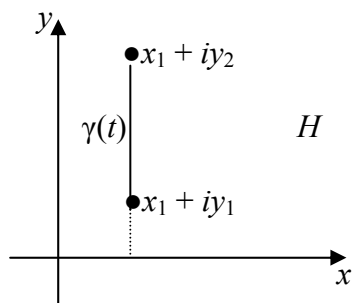
Om $\gamma : [a, b] \rightarrow H$, given av

$$\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\forall) t \in [a, b] \subset \mathbf{R},$$

är slät (d.v.s $x(t)$ och $y(t)$ existerar för varje $t \in [a, b]$ och funktionerna $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerliga) då definieras längden av γ enligt formeln:

Definition 2.1:

$$l(\gamma) := \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{y} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} := \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \quad (1)$$



Figur 2.5. En Euklidisk sträcka i det hyperboliska planet.

Exempel:

Låt $z_1 = x_1 + iy_1$ och $z_2 = x_1 + iy_2$ där $0 < y_1 < y_2$, se figur 2.2. Låt γ vara den Euklidiska sträckan med parametriseringen $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (1-t)z_1 + tz_2 = (1-t)[x_1 + iy_1] + t[x_1 + iy_2] = x_1 + i[(1-t)y_1 + ty_2] = \\ &= x_1 + i[y_1 + t(y_2 - y_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(y_2 - y_1)^2}}{y_1 + t(y_2 - y_1)} dt = \int_0^1 \frac{y_2 - y_1}{y_1 + t(y_2 - y_1)} dt = \\ &= \ln[y_1 + t(y_2 - y_1)] \Big|_0^1 = \ln y_2 - \ln y_1 = \ln \frac{y_2}{y_1} = \ln[0, iy_1, iy_2, \infty], \end{aligned}$$

$$\text{där } [z, z_1, z_2, z_3] := \frac{z - z_2}{z - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = [z, z_1, z_2, z_3]_k, \quad (k=2)$$

Sats 2.2: Bågelementet ds är invariant m.a.p Möbiusavbildningarna $T \in \text{Möb}^+$ för vilka $T(H) = H$.

D.v.s om $w = u + iv = Tz = \frac{az + b}{cz + d}$ där $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ och $ad - bc = 1$, då är $\frac{|dw|}{\text{Im } w} = \frac{|dz|}{y}$.

$$\text{Bevis: } w = u + iv \quad \Rightarrow v = \frac{y}{|cz + d|^2}.$$

$$dw = T'(z)dz = \dots = \frac{dz}{(cz + d)^2}, \text{ som vi sett tidigare.}$$

Vi får nu att:

$$\frac{|dw|}{\operatorname{Im} w} = \frac{|dw|}{v} = \frac{|dz|}{|cz+d|^2} \cdot \frac{1}{v} = \frac{|dz|}{|cz+d|^2} \cdot \frac{|cz+d|^2}{y} = \frac{|dz|}{y}.$$

□

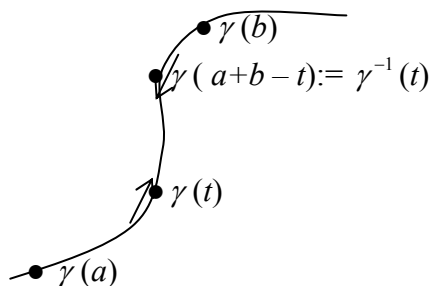
Anmärkingar:

1. Om Γ är en styckvis slät kurva, d.v.s $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m$ där varje γ_k är slät och slutpunkten av γ_k är startpunkt för γ_{k+1} ($1 \leq k \leq m-1$) så definieras ds -längden av Γ genom:

$$l(\Gamma) := \sum_{k=1}^m l(\gamma_k), \text{ där } l(\gamma_k) \text{ beräknas enligt (1)}$$

2. Om Γ_1 och Γ_2 är styckvis släta kurvor då definieras $l(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) := l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$, även om Γ_1 och Γ_2 är disjunkta.

3. Om $\gamma : [a, b] \rightarrow H$ då definieras inversen av γ betecknad γ^{-1} genom: $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow H$, $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a+b-t)$ ($\forall t \in [a, b]$).



Figur 2.6

Man ser att γ och γ^{-1} har samma ds -längd:

$$l(\gamma) = l(\gamma^{-1}) \text{ d.v.s } \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma^{-1}} ds \text{ för varje styckvis slät kurva } \gamma.$$

För ett rigoröst bevis av denna viktiga egenskap måste man använda variabelbytet i en vanlig (Riemann) integral.

Följdsats (till Sats 2.2): Om $\gamma: [a, b] \rightarrow H$ är en styckvis slät kurva och $T \in \text{Möb}^+$, $T(H) = H$, då har γ och $T(\gamma)$ **samma** längd d.v.s,

$$\int_{\gamma} ds = \int_{T \circ \gamma} ds$$

Bevis:

$$\int_{T(\gamma)} ds = \int_{T(\gamma)} \frac{|dw|}{\text{Im } w} = \int_a^b \frac{|w'(z)z'(t)|dt}{v(t)} = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{\text{Im } z} = \int_{\gamma} ds$$

Låt V vara definierad genom,

$$Vz = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \text{ där } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \text{ och } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Vi får då att:

$$w = u + iv = Vz \Rightarrow v = \frac{(-\alpha\delta + \beta\gamma)y}{|\gamma\bar{z} + \delta|^2} = \text{Im } w$$

$$V(H) = H \Leftrightarrow -\alpha\delta + \beta\gamma > 0 \text{ d.v.s } \alpha\delta - \beta\gamma < 0.$$

I detta fall låter vi $r := \sqrt{\beta\gamma - \alpha\delta}$, $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$.

$$V(z) = \frac{\frac{\alpha}{r}\bar{z} + \frac{\beta}{r}}{\frac{\gamma}{r}\bar{z} + \frac{\delta}{r}} = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \quad (\forall) z \in \hat{\mathbf{C}}$$

Matrisen $\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{r} & \frac{\delta}{r} \end{bmatrix} = M_V$ har determinanten $\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{r^2} = -1$.

Anmärkning: Om $V(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$ är som tidigare får vi att;

$$dV = \frac{\alpha(\gamma\bar{z} + \delta) - \gamma(\alpha\bar{z} + \beta)}{(\gamma\bar{z} + \delta)^2} d\bar{z} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma\bar{z} + \delta)^2} d\bar{z}$$

Alltså för $w = u + iv = Vz$ har vi att:

$$\frac{|dw|}{\text{Im } w} = \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma| |d\bar{z}|}{|\gamma\bar{z} + \delta|^2} \cdot \frac{|\gamma\bar{z} + \delta|^2}{|\alpha\delta - \beta\gamma| y} = \frac{|d\bar{z}|}{y} = \frac{|dz|}{y}$$

och $l(V \circ \gamma) = l(\gamma)$ för varje styckvis slät kurva i H .

Från och med nu betecknar vi med $\mathcal{J}(H)$ mängden:

$\mathcal{J}(H) := \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ där:

$$\mathcal{A} = \left\{ T \mid Tz = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ där } a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad-bc=1 \right\} \subset \text{Möb}^+$$

$$\mathcal{B} = \left\{ V \mid Vz = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}, \text{ där } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}, \alpha\delta - \beta\gamma = -1 \right\} \subset \text{Möb}^-$$

Anmärkning:

Vi har sett att $T, V \in \mathcal{J}(H)$ medför att $T(H) = H$ och $V(H) = H$.

Sats 2.3: $(\mathcal{J}(H), \circ)$ är en grupp.

Bevis:

1. Vi måste först bevisa att $\mathcal{J}(H)$ är invariant med avseende på operationen ” \circ ”, d.v.s $f \circ g \in \mathcal{J}(H)$ för alla $f, g \in \mathcal{J}(H)$.

Fall 1: $f, g \in \mathcal{A}$

Fall 2: $f, g \in \mathcal{B}$

Fall 3: $f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{B}$

Fall 4: $f \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{A}$

Fall 1: $f(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, g(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ där $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbf{R}$ och $a_k d_k - b_k c_k = 1, k = 1, 2$

$$(f \circ g)(z) = \frac{a_1 g(z) + b_1}{c_1 g(z) + d_1} = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \dots = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + c_1 b_2 + d_1 d_2}$$

Alltså: $(f \circ g)(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$ där,

$$M_{f \circ g} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & c_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = M_f \cdot M_g$$

Det $M_{f \circ g} = (I) \cdot (I) = 1$. Därför får vi att:
 $f \circ g \in \mathcal{A} \subset \mathcal{J}(H)$.

$$\text{Fall 2: } f(z) = \frac{\alpha_1 \bar{z} + \beta_1}{\gamma_1 \bar{z} + \delta_1}, \quad g(z) = \frac{\alpha_2 \bar{z} + \beta_2}{\gamma_2 \bar{z} + \delta_2}$$

$$(f \circ g)(z) = \frac{\alpha_1 \overline{g(z)} + \beta_1}{\gamma_1 \overline{g(z)} + \delta_1} = \frac{\alpha_1 \overline{\left(\frac{\alpha_2 \bar{z} + \beta_2}{\gamma_2 \bar{z} + \delta_2} \right)} + \beta_1}{\gamma_1 \overline{\left(\frac{\alpha_2 \bar{z} + \beta_2}{\gamma_2 \bar{z} + \delta_2} \right)} + \delta_1} = \dots = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2)z + \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2}{(\gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2)z + \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2}$$

$$M_{f \circ g} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2 \\ \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\det M_{f \circ g} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Vilket betyder $f \circ g \in \mathcal{A}$

$$\text{Fall 3: } f(z) \text{ som i fall 1 och } g(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$$

$$(f \circ g)(z) = \frac{a_1 g(z) + b_1}{c_1 g(z) + d_1} = \frac{a_1 \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} + b_1}{c_1 \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} + d_1} = \frac{(a_1 \alpha + b_1 \gamma) \bar{z} + a_1 \beta + b_1 \delta}{(c_1 \alpha + d_1 \gamma) \bar{z} + c_1 \beta + d_1 \delta}$$

$$M_{f \circ g} = \begin{bmatrix} a_1 \alpha + b_1 \gamma & a_1 \beta + b_1 \delta \\ c_1 \alpha + d_1 \gamma & c_1 \beta + d_1 \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det M_{f \circ g} = -1 \quad \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{B}$$

Fall 4: $f \in \mathcal{B}$ och $g \in \mathcal{A}$

$$f(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \quad \text{och} \quad g(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$$

$$(f \circ g)(z) = \frac{\overline{g(z)} + \beta}{\gamma \overline{g(z)} + \delta} = \frac{\alpha \frac{a_1 \bar{z} + b_1}{c_1 \bar{z} + d_1} + \beta}{\gamma \frac{a_1 \bar{z} + b_1}{c_1 \bar{z} + d_1} + \delta} = \frac{\alpha(a_1 \bar{z} + b_1) + \beta(c_1 \bar{z} + d_1)}{\gamma(a_1 \bar{z} + b_1) + \delta(c_1 \bar{z} + d_1)} =$$

$$\frac{\bar{z}(\alpha a_1 + \beta c_1) + \alpha b_1 + \beta d_1}{\bar{z}(\gamma a_1 + \delta c_1) + \gamma b_1 + \delta d_1}$$

$$M_{f \circ g} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta c_1 & \alpha b_1 + \beta d_1 \\ \gamma a_1 + \delta c_1 & \gamma b_1 + \delta d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

det $M_{f \circ g} = (-1) \cdot (1) = -1$, vilket betyder att $f \circ g \in \mathcal{B}$.

2. Eftersom $Iz = z$ är det uppenbart att $I \in \mathcal{A} \subset \mathcal{J}(H)$ och $f \circ I = I \circ f = f$ (\forall) $f \in \mathcal{J}(H)$

3. Varje element $\in \mathcal{J}(H)$ har invers. För varje element $h \in \mathcal{A}$

Så vet vi att $h^{-1} \in \mathcal{A}$.

Detsamma gäller för elementen i \mathcal{B} .

$h \in \mathcal{B} \Rightarrow h^{-1} \in \mathcal{B}$

Bevis: $h(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$ där $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$

$$h(z) = w \Leftrightarrow \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} = w \Leftrightarrow z = \frac{\delta \bar{w} - \beta}{-\gamma \bar{w} + \alpha} \text{ och } \delta \alpha - (-\beta)(-\gamma) = \alpha \delta - \beta \gamma = -1$$

Alltså är $M_h = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ och $M_{h^{-1}} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

$$z = h^{-1}(w) \Rightarrow h^{-1}(w) = \frac{\delta \bar{w} - \beta}{-\gamma \bar{w} + \alpha} \text{ och } h^{-1} \in \mathcal{B} \subset I(H).$$

Varje element i $\mathcal{J}(H)$ inverterbart och inversen ligger i $\mathcal{J}(H)$.

$\Rightarrow (\mathcal{J}(H), \circ)$ är en grupp.

□

Anmärkning: Vi har sett att då $U \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ och γ är en styckvis slät kurva i H då har γ och $U \circ \gamma$ samma ds -längd:

$$\lambda(\gamma) = \lambda(U \circ \gamma).$$

Sats 2.4: Om $V \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ så gäller att:

1. $V \in \mathcal{A} \Rightarrow [Vz, Vz_1, Vz_2, Vz_3] = [z, z_1, z_2, z_3]$ för alla $z, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$.
2. $V \in \mathcal{B} \Rightarrow [Vz, Vz_1, Vz_2, Vz_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}$ för alla $z, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$.

De föregående likheterna gäller för alla 6 anharmoniska förhållanden.

I fortsättningen kommer följande anharmoniska förhållande att användas;

$$[z, z_1, z_2, z_3] := [z, z_1, z_2, z_3]_2 = \frac{z - z_2}{z - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Bevis: Egenskap 1 bevisades i kap 1.13.

$$[Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3] = [z, z_1, z_2, z_3] \quad (\forall) \text{ parvis skilda } z, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$$

Låt oss ta $V \in \mathcal{B}$.

$$Vz = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = -1.$$

Låt $z, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ vara parvis skilda samt $\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ vilka också är också parvis skilda.

$$V = T \circ k \text{ där } k(z) = \bar{z}$$

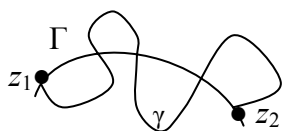
$$[Vz, Vz_1, Vz_2, Vz_3] = [T(kz), T(kz_1), T(kz_2), T(kz_3)] = [kz, kz_1, kz_2, kz_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}$$

□

2.3 Geodetiska linjer

Definition 2.2: En kurva Γ i H kallas för **geodet** eller **geodetisk linje** om den har följande egenskaper:

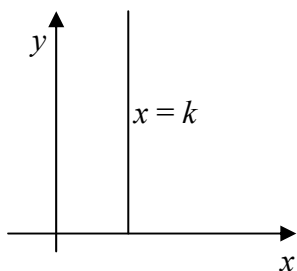
För varje $z_1, z_2 \in \Gamma$ har bågen av Γ med ändpunkterna z_1 och z_2 längden mindre än längden för vilken annan kurva som helst så att ändpunkterna av γ är z_1 och z_2 .



Figur 2.7

Sats 2.5: De geodetiska linjerna i (H, ds) är antingen de Euklidiska halvlinjerna parallella med imaginära axeln oy eller halvcirkeln som har medelpunkt på reella axeln ox .

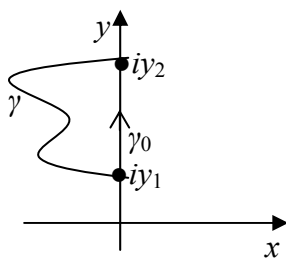
Bevis: Vi bevisar först att halvlinjerna $x = k = \text{konstant}$ (och $y > 0$) är geodeter. På grund av att ds är $\mathcal{J}(H)$ -invariant räcker det med att ta fallet då $k=0$ eftersom $V \in \mathcal{A}$ då $Vz = z - k$.



Figur 2.8

Låt nu $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$, $0 < y_1 \leq y_2$ och låt $\gamma_0 : [0,1] \rightarrow H$, $\gamma_0(t) = (1-t)iy_1 + tiy_2$, se figur 2.9.

Vi har sett att $l(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} ds = \ln \frac{y_2}{y_1} = \ln[0, iy_1, iy_2, \infty]$



Figur 2.9.

Låt oss nu betrakta en annan kurva γ från iy_1 till iy_2 , se figur 2.9. Vi antar att γ är en slät kurva.

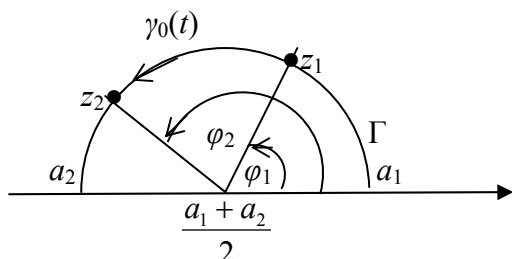
$$\gamma : [0,1] \rightarrow H, \quad \gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{där} \quad \gamma(0) = iy_1 ; \gamma(1) = iy_2.$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{y'(t)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln y(t) \Big|_0^1 = \\ &= \ln(y(1)) - \ln(y(0)) = \ln \frac{y(1)}{y(0)} = \ln \frac{iy(1)}{iy(0)} = \ln \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \ln \frac{iy_2}{iy_1} = \ln \frac{y_2}{y_1} = l(\gamma_0). \end{aligned}$$

Alltså är $l(\gamma_0) \leq l(\gamma)$ eftersom iy_1 och iy_2 var godtyckliga är oy en geodet i H . Varje vertikal H -linje är en geodetisk linje.

□

Låt oss nu betrakta en halvcirkel Γ i H med medelpunkt på ox och punkterna $z_1, z_2 \in \Gamma$, $z_1 \neq z_2 \Rightarrow \operatorname{Re} z_1 \neq \operatorname{Re} z_2$. Vi antar här att $\operatorname{Re} z_2 < \operatorname{Re} z_1$. Ändpunkterna på Γ betecknas a_1 och a_2 . Medelpunkten för Γ blir då $\frac{a_1 + a_2}{2}$, se figur 2.10.



Figur 2.10.

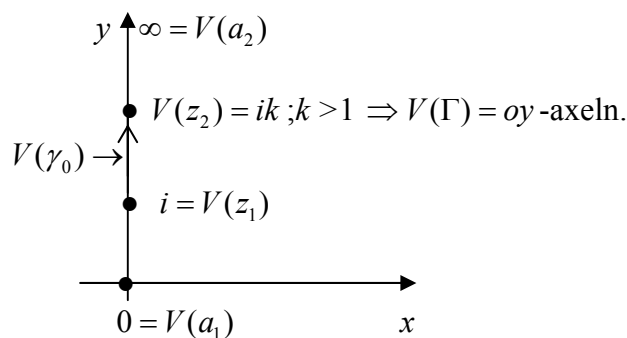
Låt γ_0 vara bågen av Γ , se figur 2.10.

$\gamma_0 : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow H_0$, där $\varphi_1 = \operatorname{Arg} z_1$ och $\varphi_2 = \operatorname{Arg} z_2$.

$$\gamma_0(t) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} e^{it}, \quad t \in [\varphi_1, \varphi_2]$$

$$Vz := i \frac{z - a_1}{z - a_2} \cdot \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_1} \quad (a_1 \rightarrow 0; a_2 \rightarrow \infty; z_1 \rightarrow i)$$

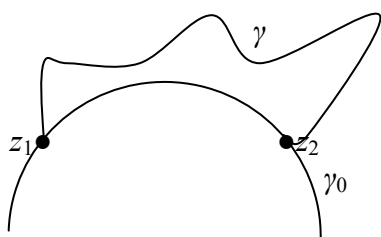
\Rightarrow



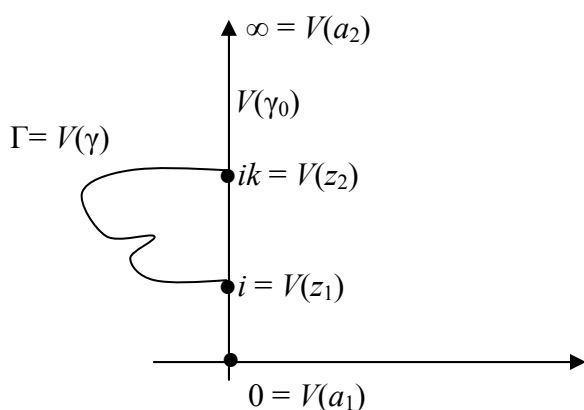
Figur 2.11.

$$l(\gamma_0) = l(V(\gamma_0)) = \ln \frac{V(z_2)}{V(z_1)} = \ln \left[\overset{V(a_1)}{0}, V(z_1), V(z_2), \overset{V(a_2)}{\infty} \right] = \ln[a_1, z_1, z_2, a_2]$$

Nu tar vi en annan kurva γ i H med startpunkt z_1 och slutpunkten z_2 , se figur 2.12
 $V \circ \gamma$ blir en kurva med startpunkt $V(z_1) = i$ och slutpunkt $V(z_2) = ik$, se figur 2.13.



Figur 2.12



Figur 2.13

Enligt första delen av beviset får vi:

$$l(V \circ \gamma) \geq l(V \circ \gamma_0) = \ln[a_1, z_1, z_2, a_2] = l(\gamma_0).$$

Bågen γ_0 har alltså kortaste längden bland kurvorna som binder samman z_1 och z_2 . □

Anmärkning: Om $z_1, z_2 \in H$ och $z_1 \neq z_2$ så finns det en och endast en geodesisk linje som går mellan punkterna z_1 och z_2 . Vi kallar de geodesiska linjerna i (H, ds) för hyperboliska linjer eller H -linjer.

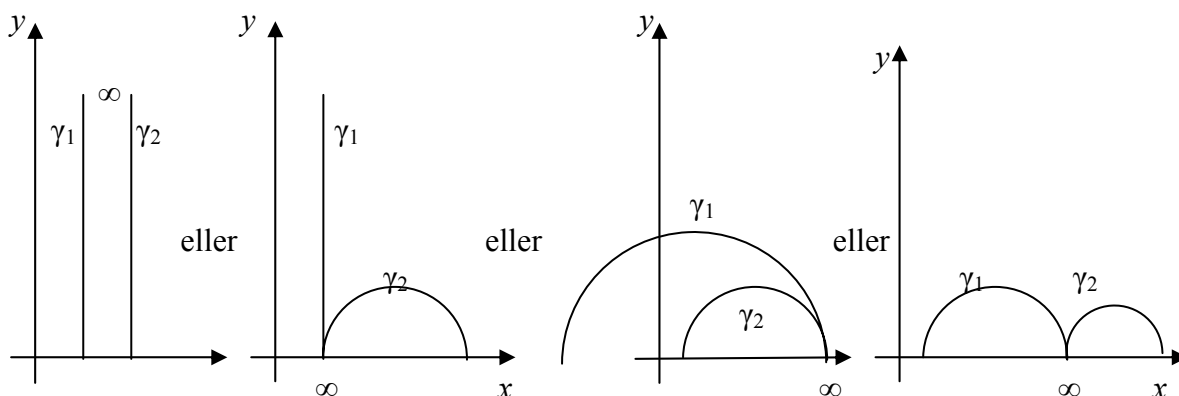
Definition 2.3: Låt z_1, z_2 vara två godtyckliga punkter i H . Hyperboliska avståndet $d_H(z_1, z_2)$ mellan z_1 och z_2 definieras då som (hyperboliska-) längden av geodetens båge med ändpunkter i z_1 och z_2 .

$$d_H(z_1, z_2) = 0 \text{ då och endast då } z_1 = z_2.$$

För $z_1 \neq z_2$ har vi sett att $d_H(z_1, z_2) = \ln[a_1, z_1, z_2, a_2]$. Vi ser att om $z_1 \rightarrow a_1$
 $\Rightarrow d_H(z_1, z_2) \rightarrow \infty$ och om $z_2 \rightarrow i\infty$, $d_H(z_1, z_2) \rightarrow \infty$.

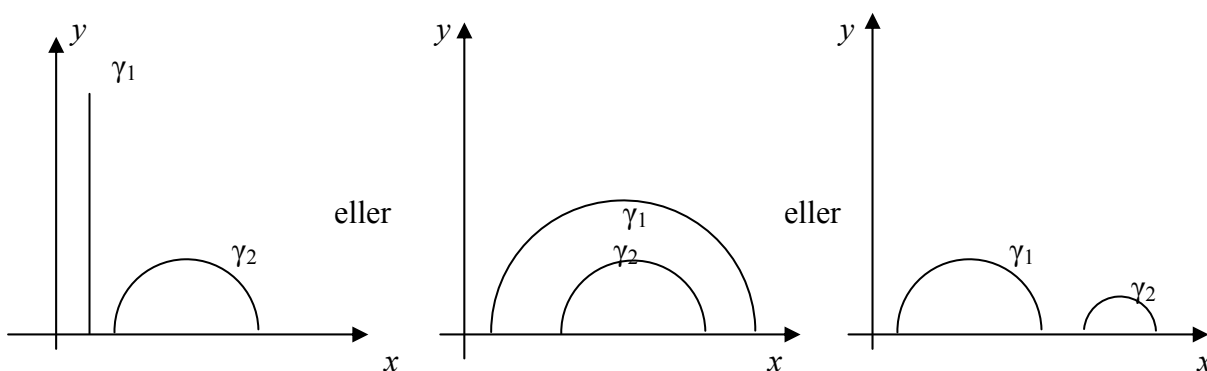
Alltså är oändligheten i hyperboliska planet $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Två geodetiska linjer γ_1 och γ_2 kallas för **parallella** om de möts i oändligheten d.v.s. tangerar varandra i en punkt enligt figur 2.14.



Figur 2.14. Olika fall då γ_1 är parallell med γ_2 .

Två geodeter som saknar gemensam punkt och som inte är parallella kallas för **ultraparallella**, se figur 2.15.



Figur 2.15. Olika fall då γ_1 är ultraparallell med γ_2 .

Sats 2.6: Funktionen $d_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ har de tre följande egenskaperna:

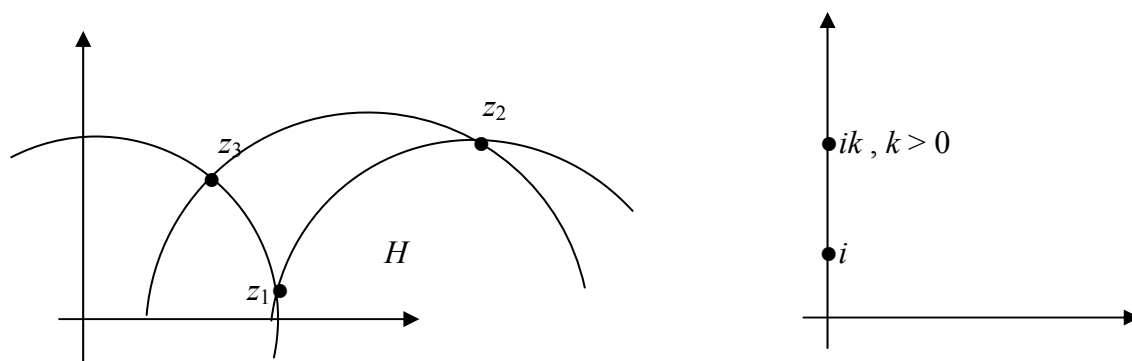
1. $d_H(z_1, z_2) \geq 0$ och $d_H(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1$ och z_2
2. $d_H(z_1, z_2) = d_H(z_2, z_1)$ ($\forall z_1, z_2$). (Man säger att d_H är symmetrisk)
3. För $z_1, z_2, z_3 \in H$ gäller triangelolikheten:

$$d_H(z_1, z_2) \leq d_H(z_1, z_3) + d_H(z_3, z_2)$$

$$d_H(T(z_1), T(z_2)) \leq d_H(T(z_1), T(z_3)) + d_H(T(z_3), T(z_2)) \text{ och}$$

$d_H(z_1, z_2) = d_H(z_1, z_3) + d_H(z_3, z_2)$ då och endast då z_3 ligger på H -linjen genom z_1 och z_2 mellan z_1 och z_2 .

Bevis:



Figur 2.16.

Vi antar att $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$ enligt figur 2.16.

Möbiusavbildningen $V(z) = i \frac{z - a_1}{z - a_2} \cdot \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_1}$ har följande egenskaper:

$$V(H) = H, \quad V(a_1) = 0, \quad V(a_2) = \infty, \quad \text{och} \quad V(z_1) = i$$

$$V(z_1) = i \Leftrightarrow k \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_1}$$

$$d_H(z_1, z_2) = d_H(Vz_1, Vz_2) = \ln k \geq 0.$$

$$d_H(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow V(z_1) = V(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2 \quad (\text{eftersom } V \text{ är bijektiv})$$

Om $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ antar vi att $\operatorname{Im} z_1 = y_1 \leq y_2$.

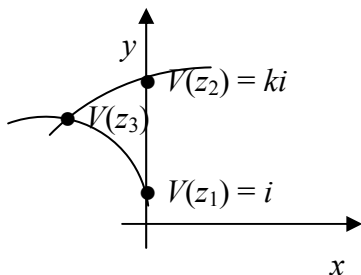
$$d_H(z_1, z_2) = \ln \frac{y_2}{y_1} \geq 0 \quad \text{och} \quad d_H(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{y_2}{y_1} = 0 \Leftrightarrow y_2 = y_1 \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

Egenskap 1 är nu bevisad.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Eftersom } [a_1, z_1, z_2, a_2] &= \frac{a_1 - z_1}{a_1 - a_2} \cdot \frac{z_2 - a_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_2 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{a_2 - z_2}{a_2 - a_1} \cdot \frac{z_1 - a_1}{z_1 - z_2} = \\ &= [a_2, z_2, z_1, a_1] \end{aligned}$$

3. Om vi har punkterna z_1, z_2, z_3 som i figur 2.16 så får vi:

$$d_H(z_1, z_2) = d_H(V(z_1), V(z_2)) \quad (\text{eftersom } V \in \mathcal{A})$$



Figur 2.17.

$V(z_1)$ och $V(z_2)$ ligger på oy -axeln se figur 2.17. Vi har sett att delen av oy -axeln mellan $V(z_1) = i$ och $V(z_2) = ki$ är en geodetisk båge. Vi får då att:

$$d_H(V(z_1), V(z_2)) \leq d_H(V(z_1), V(z_3)) + d_H(V(z_3), V(z_2)) \quad (1)$$

D.v.s.

$$d_H(z_1, z_2) \leq d_H(z_1, z_3) + d_H(z_3, z_2).$$

Om $d_H(z_1, z_2) = d_H(z_1, z_3) + d_H(z_3, z_2)$ har vi likhet i (1). Likheten kan endast förekomma då och endast då $V(z_3)$ ligger på oy -axeln mellan $V(z_1) = i$ och $V(z_2) = ki$.

$z_3 = V^{-1}(V(z_3))$ ligger på bågen av geodeten mellan z_1 och z_2 . □

Alltså: (H, d_H) är ett **metriskt rum**

2.4 Isometrier av (H, ds)

Definition 2.4: En avbildning $f: H \rightarrow H$ kallas för **isometri** av (H, ds) om f är **bijektiv** och $d_H(f(z_1), f(z_2)) = d_H(z_1, z_2)$ för alla punkter $z_1, z_2 \in H$.

Sats 2.7: Mängden av alla isometrier av (H, ds) bildar en grupp med avseende på sammansättningen av funktioner.

Bevis: Låt oss beteckna $\mathcal{J}^*(H) := \{f: H \rightarrow H \mid f \text{ isometri}\}$.

Det är tydligt att om

$f, g \in \mathcal{J}^*(H)$ då är $f \circ g \in \mathcal{J}^*(H)$. D.v.s $\mathcal{J}^*(H)$ är stabil m.a.p operationen \circ .

Det är uppenbart att $I \in \mathcal{J}^*(H)$ där I är identitetsavbildningen av H .

$$I: H \rightarrow H, I(z) = z \quad \forall z \in H.$$

Om $f \in \mathcal{J}^*(H)$ då är f bijektiv. Låt $z_1, z_2 \in H$ och $w_1 := f^{-1}(z_1)$; $w_2 := f^{-1}(z_2)$.

$$d_H(f(w_1), f(w_2)) = d_H(w_1, w_2), \text{ eftersom } f \text{ är en isometri.}$$

Alltså:

$$d_H(f^{-1}(z_1), f^{-1}(z_2)) = d_H(w_1, w_2) = d_H(f(w_1), f(w_2)) = d_H(z_1, z_2)$$

Vilket betyder att:

$$f^{-1} \in \mathcal{J}^*(H).$$

Vi har sett (s.53) att $l(\gamma) = l(U \circ \gamma)$ för varje $U \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ och för varje styckvis slät kurva γ .

Låt $z_1, z_2 \in H, z_1 \neq z_2$ för att undvika det triviala fallet $z_1 = z_2$ då $d_H(z_1, z_2) = d_H(f(z_1), f(z_2)) = 0$ för vilken funktion som helst $f: H \rightarrow H$.

Låt nu γ vara bågen av geodeten genom z_1, z_2 så att γ har startpunkt i z_1 och slutpunkt i z_2 (eller tvärt om).

För varje $U \in \mathcal{J}(H) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ är $U \circ \gamma$ bågen av geodeten genom $U(z_1)$ och $U(z_2)$ med startpunkt $U(z_1)$ och slutpunkt $U(z_2)$ (eller tvärt om).

Vi får att:

$$d_H(U(z_1), U(z_2)) = d_H(z_1, z_2) \text{ för alla punkterna } z_1, z_2 \in H.$$

Enligt definitionen är U en isometri av H d.v.s. $U \in \mathcal{J}^*(H)$. U är ett godtyckligt element i $\mathcal{J}(H) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Vi har nu bevisat att $\mathcal{J}(H) \subseteq \mathcal{J}^*(H)$.

Det är anmärkningsvärt att de två mängderna $\mathcal{J}(H)$ och $\mathcal{J}^*(H)$ är **lika**. Vi formulerar följande sats:

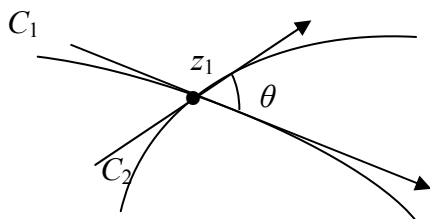
Sats 2.8: $\mathcal{J}(H) = \mathcal{J}^*(H)$ d.v.s en avbildning $f: H \rightarrow H$ är en isometri av (H, ds) då och endast då $f: \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ och } ad - bc = 1 \quad \text{eller}$$

$$f(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta\bar{z}}{\gamma\bar{z} + \delta\bar{z}}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \text{ och } \alpha\beta - \gamma\delta = -1$$

Vi ger inga detaljer i beviset av påståendet att $\mathcal{J}(H) \subseteq \mathcal{J}^*(H)$.

2.5 Hyperboliska vinklar

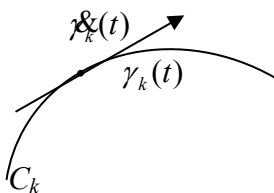


Figur 2.18 Vinkel mellan två kurvor C_1 och C_2 .

Låt oss betrakta två släta kurvor C_1 och C_2 , som är givna av parameterframställningarna;

$$\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} \text{ och } z_1 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$$

Vi antar att C_1 och C_2 är så kallade **regulära kurvor** d.v.s. $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0$ och $\dot{\gamma}_2(t) \neq 0$ ($\forall t \in [a, b]$). För varje $t \in [a, b]$ är $\dot{\gamma}_k(t)$ tangentvektor till C_k i punkten $\gamma_k(t)$.



Figur 2.19

För $t = t_0$ är $\dot{\gamma}_1(t)$ och $\dot{\gamma}_2(t)$ tangentvektorer till C_1 respektive C_2 i punkten z_1 .

Man definierar H -vinkeln mellan C_1 och C_2 som den **Euklidiska vinkeln** mellan C_1 och C_2 i z_1 d.v.s talet,

$$\theta := \arccos \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\| \cdot \|\dot{\gamma}_2(t_0)\|} \in [0, \pi].$$

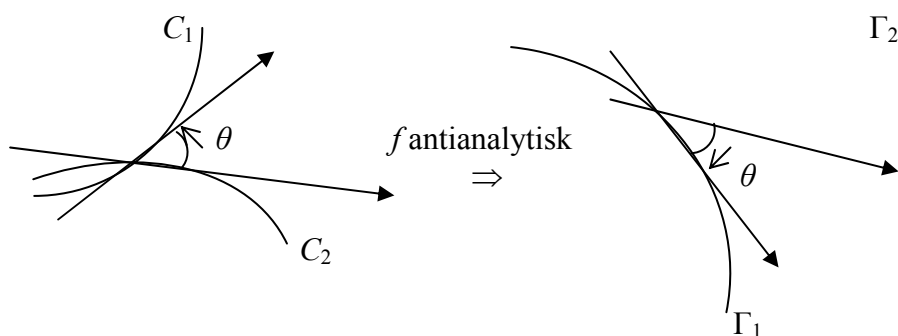
Sats 2.9: Ω_1 och Ω_2 är områden i \mathbf{C} .

$f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ är analytiska, $z_1 \in \Omega_1$, C_1 och C_2 är **regulära kurvor** i Ω_1 , $z_1 \in C_1 \cap C_2$,

$$\Gamma_1 = f(C_1), \Gamma_2 = f(C_2)$$

Om $f'(z_1) \neq 0 \Rightarrow$ vinkeln mellan C_1 och C_2 i $z_1 =$ vinkeln mellan Γ_1 och Γ_2 i $f(z_1)$.

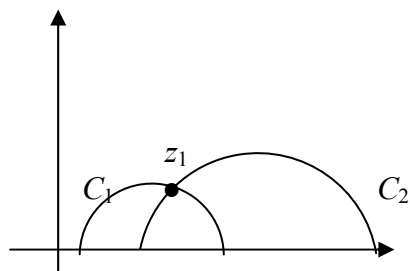
Om \bar{f} är analytisk så har vinklarna samma absolutbelopp med motsatt tecken, θ och $-\theta$, se figur 2.20.



Figur 2.20

$$V \in \mathcal{B}, V(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} = g(\bar{z})$$

Vi antar nu att C_1 och C_2 är skilda H -linjer genom $z_1 \in H$. Låt θ vara vinkeln mellan C_1 och C_2 .



Figur 2.21

Om $V \in \mathcal{A}$ så är vinkeln mellan $V(C_1)$ och $V(C_2)$ lika med θ . Då $V \in \mathcal{B}$ är vinkeln mellan $V(C_1)$ och $V(C_2)$ lika med $-\theta$.

2.6 Hyperbolisk area

I det hyperboliska planet H är kvadraten av bågelementet ds given av:

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{y^2} \text{ där } z = x + iy$$

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \Rightarrow E = \frac{1}{y^2}; F = 0; G = \frac{1}{y^2}$$

I allmänhet om ytan S har parameterframställningen $r(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ av klass C^1 då är bågelementet ds på S givet av:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

Ytelementet som motsvarar parametriseringen $r(u, v)$ är:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} \, dx dy = \sqrt{\frac{1}{y^4} - 0} \, dx dy$$

Alltså är $d\sigma = \frac{dx dy}{y^2}$.

Om Ω är ett område i H eller ett slutet område i H så definieras Ω 's hyperboliska area enligt:

$$\text{Area}(\Omega) := \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}$$

Den hyperboliska arean är invariant med avseende på $\mathcal{J}(H)$, gruppen av isometrier i H .

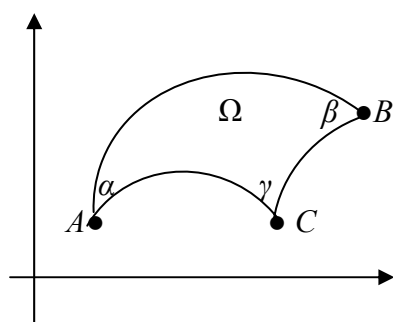
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} = V(z), \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ och } ad - bc = 1 \quad \text{eller}$$

$$z \mapsto \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} = V(z), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \text{ och } \alpha\delta - \beta\gamma = -1$$

Beviset är grundat på regler av kalkyl med yttre produkt av differentialformen av grad 1 på \mathbf{R}^2 .

2.7 Gauss – Bonnet's sats för hyperboliska trianglar

En hyperbolisk triangel är det slutna området i H som begränsas av tre räta H – linjer, se figur 2.22.



Figur 2.22. En hyperbolisk triangel Ω med vinklarna α , β , och γ .

SATS 2.10: (Gauss – Bonnet)

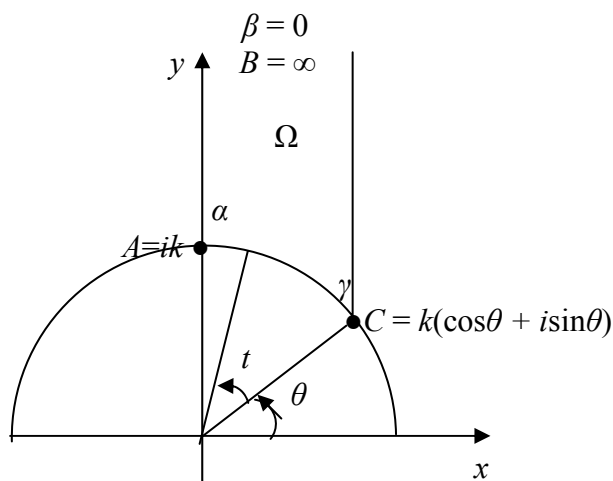
Låt Ω vara en H – triangel som begränsas av H – linjerna AB , AC , BC se figur 2.16. Anta att vinklarna är α , β , och γ som i figuren. Då gäller att:

$$\text{Area}(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Bevis:

Fall 1:

Triangelns hörn är $A = ik$, $B = \infty$, $C = ke^{i\theta}$ där $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, se figur 2.23.



Figur 2.23

De räta H -linjerna som $\partial\Omega$ består av är $\{iy \mid y \geq k\}$; $\{ke^{i\theta} \mid \theta \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ och $\{k \cos \theta + iy \mid y \geq k \sin \theta\}$. Vinklarna är: $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\beta = 0$; $\gamma = \theta$.

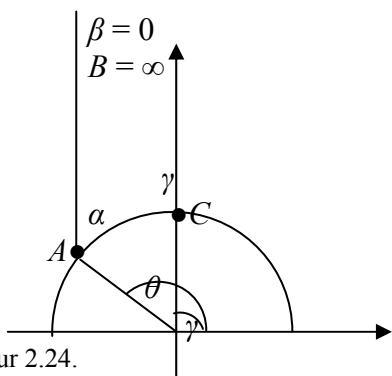
Vi använder Fubinis sats för att beräkna $\text{Area}(\Omega)$. Vi får då att:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &:= \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{k \cos \theta} \left(\int_{\sqrt{k^2 - x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_0^{k \cos \theta} \left(-\frac{1}{y} \Big|_{\sqrt{k^2 - x^2}}^{\infty} \right) dx = \\ &= \int_0^{k \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \\ \pi - (\alpha + \beta + \gamma) &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \gamma\right) = \text{Area}(\Omega) \end{aligned}$$

Fall 2:

Triangelns hörn är, $C = ki$, $k > 0$, $A = ke^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ och $B = \infty$, se figur 2.24 och vinklarna

är $\alpha = \pi - \theta$, $\beta = 0$ och $\gamma = \frac{\pi}{2}$.



Figur 2.24.

Vinkelsumman $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} - \theta$

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Area}(\Omega) := \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{k \cos \theta} \left(\int_{\sqrt{k^2 - x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_0^{k \cos \theta} \left(-\frac{1}{y} \Big|_{\sqrt{k^2 - x^2}}^{\infty} \right) dx =$$

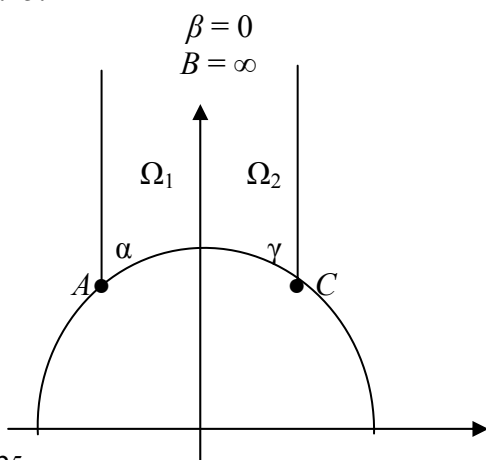
$$= \int_{k \cos \theta}^0 \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \left(\arcsin \frac{x}{k} \right) \Big|_{k \cos \theta}^0 = \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{k} \right) \Big|_{k \cos \theta}^0 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arccos 0 - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos \theta) \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \arccos(\cos \theta) = -\frac{\pi}{2} + \theta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Fall 3:

Triangelns hörn är i detta fallet: $A = ke^{i\theta_2}$, $B = \infty$ och $C = ke^{i\theta_1}$ där $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$, se figur 2.25.



Figur 2.25.

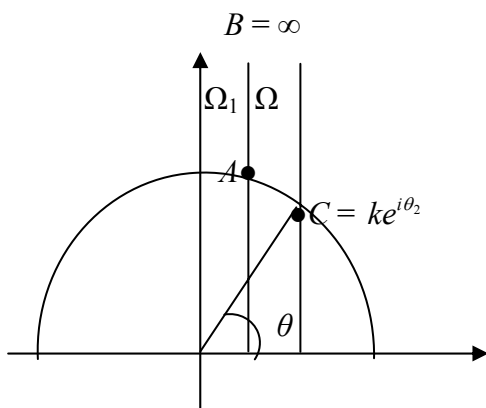
$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, se figur 2.26. $\text{Area}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$.

Då får man enligt fall 1 och fall 2:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \text{Area}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \text{Area}(\Omega_1) + \text{Area}(\Omega_2) = \\ &= \pi - \left(\alpha + 0 + \frac{\pi}{2}\right) + \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \gamma + 0\right) = 2\pi - (\pi + \alpha + \gamma + 0) = \\ &= \pi - (\alpha + \gamma + 0) \end{aligned}$$

Fall 4:

Triangelns hörn i fjärde fallet är: $A = ke^{i\theta_1}$, $B = \infty$ och $C = ke^{i\theta_2}$, se figur 2.26.



Figur 2.26.

$$\Omega_1 = \{z = x + iy \mid y = \sqrt{k^2 - x^2}; 0 \leq x \leq k \cos \theta_1\}$$

$$\Omega_2 = \{z = x + iy \mid y = \sqrt{k^2 - x^2}; 0 \leq x \leq k \cos \theta_2\}$$

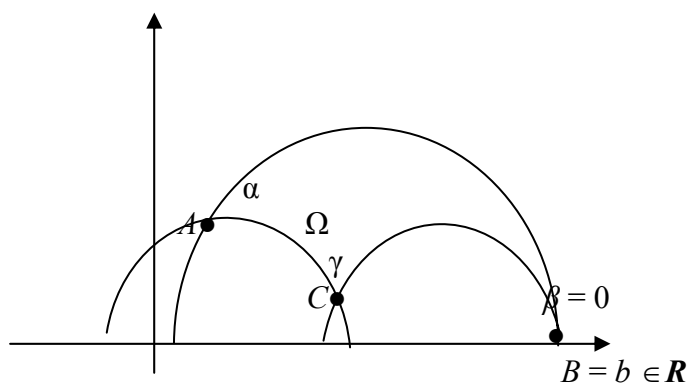
$\Omega_1 \cup \Omega = \Omega_2$ och $\Omega_1 \cap \Omega$ har area lika med noll.

Vi får alltså att:

$$\text{Area}(\Omega_2) = \text{Area}(\Omega_1) + \text{Area}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \text{Area}(\Omega_2) - \text{Area}(\Omega_1) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \gamma + 0\right) - \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \pi - \alpha + 0\right)\right] = \\ &= \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - (\alpha + \gamma + 0) \end{aligned}$$

Fall 5:

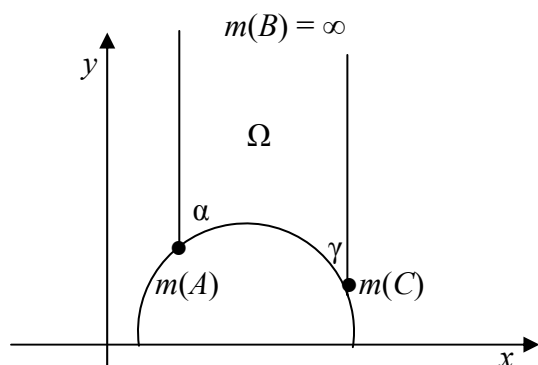


Figur 2.27.

När vi har en vinkel som är lika med noll så utnyttjas att det finns en Möbiusavbildning som skickar punkten $B = 0$ till ∞ .

$$m(z) = -\frac{1}{z-b}, \quad M_{m(z)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -b \end{bmatrix}, \quad \det M_{m(z)} = 1$$

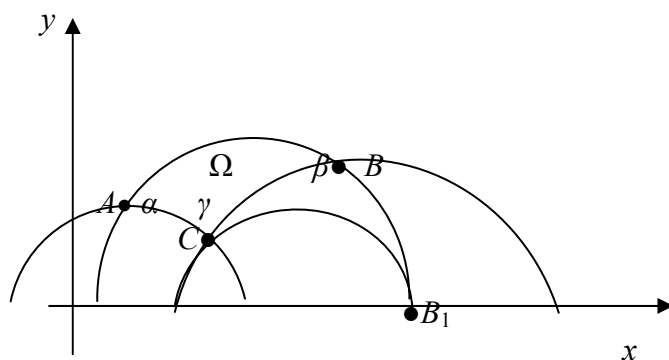
Vi får då följande situation:



Figur 2.28.

$$\text{Area}(\Omega) = \text{Area}(m(\Omega)) = \pi - (\alpha + \gamma + 0)$$

Fall 6: (Vinklarna $\alpha, \beta, \gamma > 0$)



Figur 2.29.

H -linjen AB möter $0x$ -axeln i punkten B_1 . Den Euklidiska halvcirkel genom C som tangerar H -linjen AB i B_1 är en H -linje, se figur 2.29.

Vi betecknar: $\alpha =$ vinkeln A i ΔABC
 $\beta =$ vinkeln B i ΔABC
 $\gamma =$ vinkeln C i ΔABC
 $\delta =$ vinkeln C i ΔCBB_1

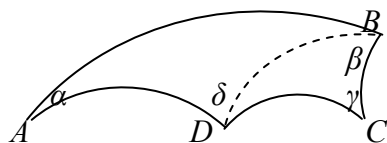
Vi tillämpar formeln från fall 5:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Delta ABC) &= \text{Area}(\Delta AB_1C) - \text{Area}(\Delta CBB_1) = \\ &= \pi - (\alpha + \gamma + \delta + 0) - [\pi - (\delta + \pi - \beta + 0)] = \\ &= \pi - (\alpha + \gamma + \delta) + \delta - \beta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

□

Anmärkning:

Med hjälp av Gauss – Bonnet's kan man nu beräkna arean av den hyperboliska polygon med $n \geq 4$ sidor.



Figur 2.30

För en firsidig polygon som i figur 2.30 får vi att arean blir:

$$\text{Area}(ABCD) = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

2.8 Hyperboliska rotationer och translationer

Låt oss nu studera verkan av Möbiusavbildningarna T över H i fallen när:

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} \text{ där } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ och } ad - bc = 1,$$

D.v.s fallen då T är en isometri i det hyperboliska planet.

Vi börjar med fallet då T är **elliptisk**.

Fall 1: Anta först att $c = 0$.

$$Tz = a^2z + ab \text{ och den ändliga fixpunkten är } z_1 = \frac{ab}{1 - a^2}.$$

$$Tz - z_1 = a^2(z - z_1) \text{ där multiplikatorn } k(T) = a^2 = \rho e^{i\theta} \text{ med } \rho = 1 \text{ och } \theta \neq 0$$

D.v.s $a^2 = e^{i\theta}$, vilket ger oss att:

$$|a^2| = |a|^2 = 1 \Rightarrow |a| = 1$$

$$a \in \mathbf{R} \text{ och } |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow d = \pm 1 \Rightarrow Tz = z + \lambda \Rightarrow T \text{ parabolisk.}$$

Om T är elliptisk och $T(H)$ då är alltid $c \neq 0$.

Fall 2: När $c \neq 0$ är båda fixpunkterna z_1 och z_2 ändliga och ges av:

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} \quad \text{där } \chi = a+d \text{ och } |\chi| < 2.$$

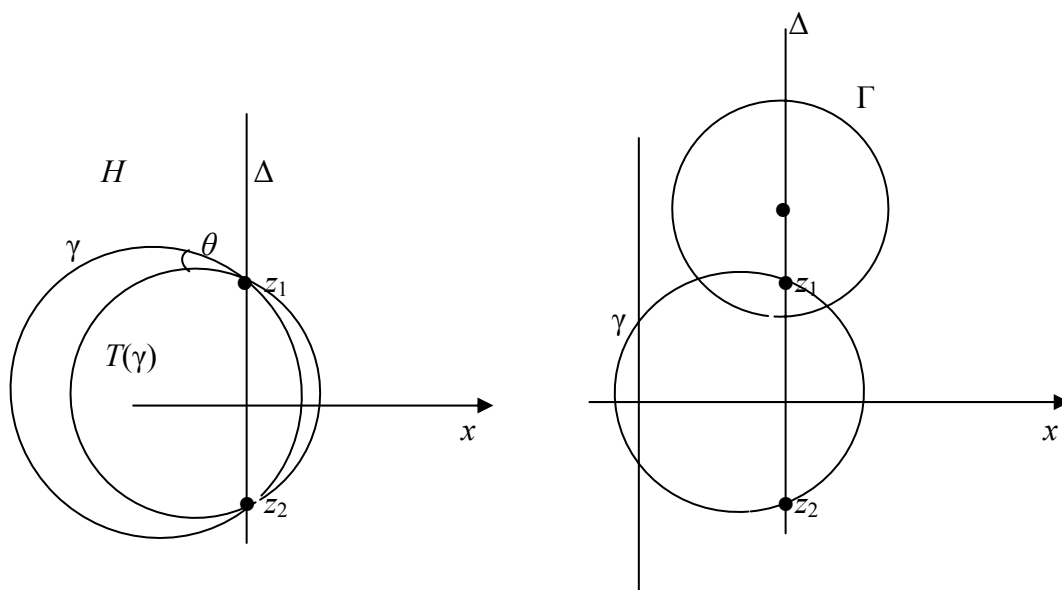
som också kan skrivas som:

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm i\sqrt{4-\chi^2}}{2c}$$

Vi antar att $c > 0$; annars byts matrisen av T ut mot:

$$\begin{bmatrix} -a & -c \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Då $z_1 = \frac{a-d+i\sqrt{4-\chi^2}}{2c} \in H$ och $z_2 = \bar{z}_1 \notin H \cup \mathbf{R}$.



Figur 2.31

Låt oss nu betrakta en cirkel γ genom z_1 och z_2 , se figur 2.31. Specialfallet γ kan vara den Euklidiska linjen genom z_1 och z_2 .

Vi såg i kapitel 1.11 att $T(\gamma)$ är en annan cirkel genom z_1 och z_2 så att γ och vinkeln mellan $T(\gamma)$ är lika med θ där,

$$k(T) = e^{i\theta}, \quad \theta \neq 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

Bilden av den hyperboliska linjen $\gamma \cap H$ är linjen $T(\gamma) \cap H$. Vinkeln mellan γ och $T(\gamma)$ är θ . På grund av detta så kallas avbildningen T för en hyperbolisk rotation kring den fixa punkten.

Cirklarna från H som är ortogonala mot cirklarna genom z_1 och $z_2 = \bar{z}_1$ är invarianta med avseende på Möbiusavbildningen T . Dessa cirklar har medelpunkten på Euklidiska linjen Δ som går genom z_1 och z_2 se figur 2.31. Bilden $T(\Gamma)$ av en sådan cirkel Γ uppfyller $T(\Gamma) = \Gamma$ och varje punkt på Γ har roterats med vinkeln θ .

Vi fortsätter nu med att studera fallet då T är **hyperbolisk**.

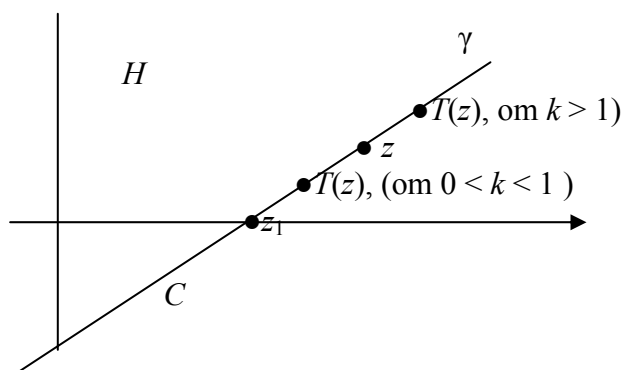
Vi antar som tidigare att

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} \text{ där } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ och } ad - bc = 1$$

När T är hyperbolisk uppfyller $\chi = a + d$, $|\chi| > 2$

Fall 1: $c = 0$; $k = a^2 \neq 1$ och $k \in]0, \infty[$.

$$Tz - z_1 = a^2(z - z_1) \text{ där } z_1 = \frac{ab}{1 - a^2}$$



Figur 2.32.

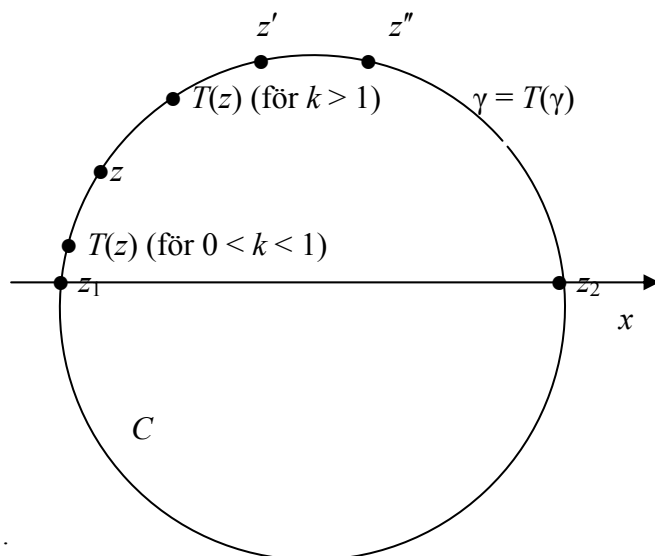
Låt oss betrakta en (generaliserad) cirkel C som går genom z_1 och $z_2 = \infty$.

Vi såg i kapitel 1.11 att $T(C) = C$. $\gamma = C \cap H$ är en hyperbolisk kurva invariant med avseende på T .

Fall 2: Antar nu att $c \neq 0$. Vi får då att:

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c}, \quad z_{1,2} \in \mathbf{R}$$

Vi antar också att $c > 0$ vilket betyder att z_1 och $z_2 \in \mathbf{R}$ och att $z_1 < z_2$, se figur 2.33.



Figur 2.33.

Vi betraktar cirkeln C genom z_1 och z_2 . $\gamma = C \cap H$ är en hyperbolisk linje och $T(\gamma) = \gamma$.
Om $z \in \gamma \Rightarrow T(\gamma) \in \gamma$

Låt $z', z'' \in \gamma$.

$$\begin{aligned} d_H(T(z'), T(z'')) &= \ln[z_1, T(z'), T(z''), z_2] = \ln[T(z_1), T(z'), T(z''), T(z_2)] = \\ &= \ln[z_1, z', z'', z_2] = d_H(T(z'), T(z'')) \end{aligned}$$

Isometrin T flyttar alltså punkter på γ till punkter på γ .

På grund av denna egenskap så kallas avbildningen T för en **hyperbolisk translation**.

Vi ska nu studera fallet då avbildningen är parabolisk.

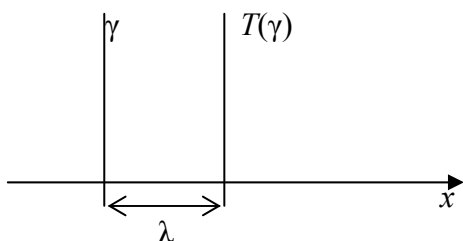
$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} \text{ där } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ och } ad - bc = 1,$$

$$\chi = a + d = \pm 2$$

Fall 1: $c = 0$.

$$Tz = z + \lambda, \lambda \in \mathbf{R}$$

T är en Euklidisk translation se figur 2.34.

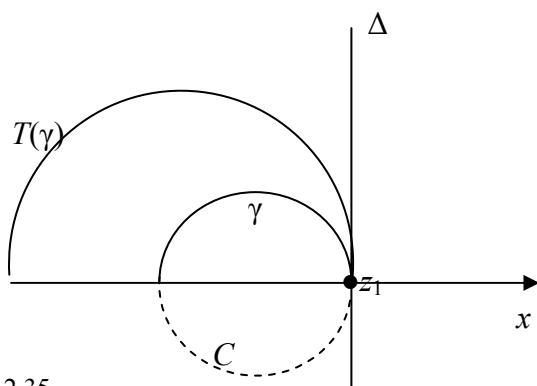


Figur 2.34

Ingen speciell egenskap förekommer hos T i det här fallet.

Fall 2: Vi antar nu att $c \neq 0$.

$$z_1 = z_2 = \frac{a-d}{2c}$$



Figur 2.35

Låt oss nu betrakta en cirkel C som går genom z_1 och har medelpunkten på $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, se figur 2.35. I fallet då C har medelpunkten i ∞ blir C den Euklidiska räta linjen Δ med ekvationen $x = z_1$.

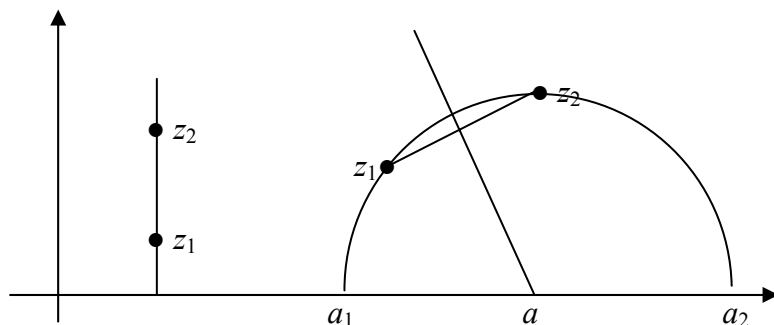
Vi såg i kapitel 1.10 att $\gamma := C \cap H$ är en hyperbolisk linje och $T(\gamma) =$ är en annan hyperbolisk linje som är tangent till γ i punkten z_1 . (Δ_0 från kapitel 1.10 blir $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$)

I det här fallet kallas avbildningen T för **limesrotation** av H runt z_1 .

2.9 Jämförelse mellan Euklidisk och Hyperbolisk geometri

Euklidisk geometri: Om P_1, P_2 är punkter i rummet \mathbf{R}^3 och $P_1 \neq P_2 \Rightarrow (\exists!) d = \text{rät linje} \subset \mathbf{R}^3$ så att $P_1, P_2 \in d$.

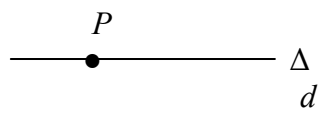
Hyperbolisk geometri: gäller att då $z_1, z_2 \in H$ och $z_1 \neq z_2 \Rightarrow (\exists!) \text{ en geodet } \gamma$ så att $z_1, z_2 \in \gamma$



Figur 2.36

Euklidisk geometri: (Euklides 5e postulat)

$d = \text{rät linje i planet } \Pi, P = \text{punkt i planet}, P \notin d \Rightarrow (\exists!) \Delta = \text{rät linje}, P \in \Delta$ och $\Delta \parallel d$, se figur 2.37.

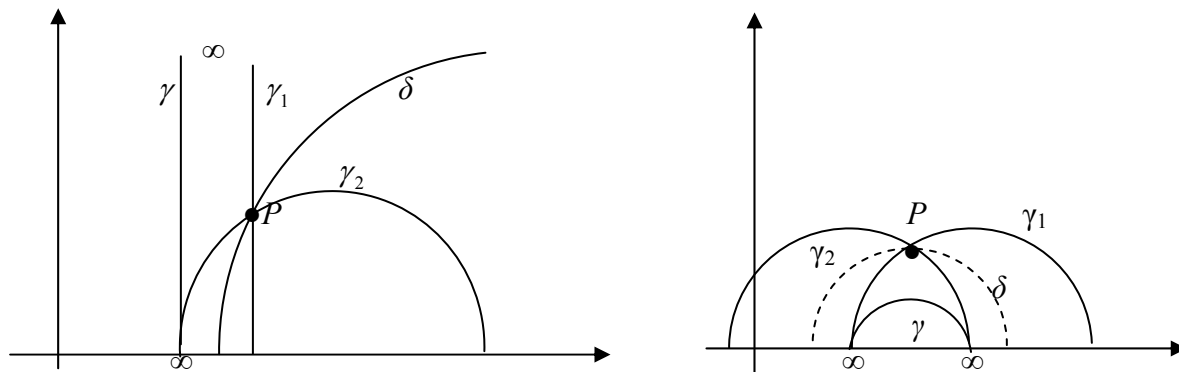


Figur 2.37

Hyperbolisk geometri:

$\gamma = \text{hyperbolisk linje} = \text{en geodet}, P = \text{punkt}, P \notin \gamma \Rightarrow \exists$ **två** hyperboliska linjer γ_1 och γ_2 som är **parallella** med γ , $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P\}$ och det finns oändligt många linjer **ultraparallella** med γ .

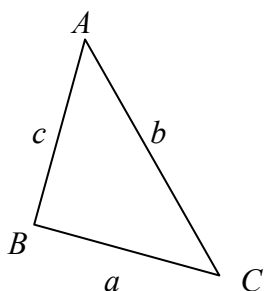
Två geodetiska linjer är parallella då de tangerar varandra i ∞ och två geodeter som saknar gemensam punkt men inte är parallella kallas för **ultraparallella**, se figur 2.38.



Figur 2.38. δ är ultraparallell med γ .

δ ultraparallell med γ .

Euklidisk geometri: Arealn av en triangel beror på längden av triangelns sidor.



Figur 2.39

Om $\triangle ABC$ har sidorna med längder $a = \|\overline{BC}\|$, $b = \|\overline{AC}\|$, $c = \|\overline{AB}\|$ och $p = \frac{a+b+c}{2}$,

Då gäller **Heron's** formel för arean av $\triangle ABC$:

$$\text{Arealn } (\triangle ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Hyperbolisk geometri: Arealn av en triangel beror endast av storleken på triangelns vinklar och inte alls av sidornas längd.

Anna Persson
Karlstad 23 maj 2006

Referenser:

Lehner J, "*Discontinuous groups and automorphic functions*", American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. (1964)

Springer G, "*Introduction to Riemann surfaces*", Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1957)

Anderson J.W, "*Hyperbolic geometry*", Springer-Verlag, London (1999)

Lay D.C, "*Linear Algebra and its applications, second edition*", Addison-Wesley Longman, Inc (2000)

Roe J, "*Elementary Geometry*", Oxford university press (1993)